Desarrollo de instrucción efectiva de fracciones desde jardín de infantes hasta octavo grado

CNEE 2010-4039

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN DE EE. UU.

NATIONAL CENTER FOR EDUCATION EVALUATION AND REGIONAL ASSISTANCE

Institute of Education Sciences

Revisión de recomendaciones

El Instituto de Ciencias de la Educación (IES) publica guías prácticas en educación para aportar la mejor evidencia y experiencia disponibles para abordar los desafíos actuales en educación. Los autores de guías de práctica combinan su experiencia con los hallazgos de investigaciones rigurosas, cuando están disponibles, para desarrollar recomendaciones específicas para abordar estos desafíos. Los autores califican la solidez de la evidencia de la investigación que respalda cada una de sus recomendaciones. Consulte el Apéndice A para obtener una descripción completa de las guías de práctica.

El objetivo de esta guía práctica es ofrecer a los educadores recomendaciones específicas basadas en evidencia que aborden el desafío de mejorar la comprensión de los conceptos de fracción por parte de los estudiantes desde jardín de infantes hasta octavo grado. La guía proporciona información práctica y clara sobre temas críticos relacionados con la enseñanza de fracciones y se basa en la mejor evidencia disponible a juicio de los autores.

Las guías de práctica publicadas por IES se ofrecen en nuestro sitio web en whatworks.ed.gov/publications/ practiceguides . Las guías prácticas publicadas hasta la fecha se muestran en la siguiente tabla.

Guías de práctica publicadas	Relevante para Todo el grado Niveles	Relevante para Elemental Escuela	Relevante para Secundario Escuela
Alentar a las niñas en matemáticas y ciencias (septiembre de 2007)			
Organizar la instrucción y el estudio para mejorar Aprendizaje estudiantil (septiembre de 2007)			
Cómo mejorar las escuelas con un rendimiento crónicamente bajo (mayo de 2008)			
Uso de datos de rendimiento estudiantil para respaldar Toma de decisiones educativas (septiembre de 2009)			
Ayudar a los estudiantes que tienen dificultades con la lectura: respuesta a la intervención (RtI) e intervención de varios niveles en el Grados de primaria (febrero de 2009)			
Alfabetización e instrucción efectiva del idioma inglés para estudiantes de inglés en los grados de primaria (diciembre de 2007)			
Mejorar la comprensión lectora en el jardín de infantes Hasta 3er grado (septiembre de 2010)			
Reducir los problemas de conducta en la escuela primaria Aula Escolar (Septiembre 2008)			
Ayudar a los estudiantes que tienen dificultades con las matemáticas: Respuesta a la Intervención (RtI) para Primaria y Escuelas intermedias (abril de 2009)			
Desarrollo de instrucción de fracciones efectivas para Desde jardín de infantes hasta octavo grado (septiembre de 2010)			
Mejora de la alfabetización de los adolescentes: prácticas eficaces de intervención y en el aula (agosto de 2008)			
Estructurar el tiempo extraescolar para mejorar Rendimiento académico (julio de 2009)			
Prevención de la deserción escolar (agosto de 2008)			
Ayudando a los estudiantes a recorrer el camino hacia la universidad: Qué pueden hacer las escuelas secundarias (septiembre de 2009)			

Desarrollo de instrucción efectiva de fracciones desde jardín de infantes hasta octavo grado

Septiembre 2010

Panel

Robert Siegler (Presidente)
Universidad de Carnegie mellon

Thomas Carpintero
Universidad de Wisconsin-Madison

Francis (saltar) Fennell
MCdaniel College, West Minster, Maryland

David Geary
Universidad de MissoUri en ColUMbia

James Lewis
Universidad de Nebraska-linColn

Yukari Okamoto
universidad de california-santa bárbara

Laurie Thompson
PROFESORA DE PRIMARIA

Jonathan Wray
Escuelas públicas del condado de Howard (Md)

Personal

Jeffrey Max
Moira McCullough
andres gothro
Sara Prenovitz
INVESTIGACIÓN EN POLÍTICAS MATEMÁTICAS

Oficial de proyecto

Susana Sánchez
INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

NCEE 2010-4039
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN DE EE. UU.

NATIONAL CENTER FOR EDUCATION EVALUATION AND REGIONAL ASSISTANCE
Institute of Education Sciences

Revisión de recomendaciones

Este informe fue preparado para el Centro Nacional de Evaluación Educativa y Asistencia Regional, Instituto de Ciencias de la Educación bajo el Contrato ED-07-CO-0062 por What Works Clearinghouse, operado por Mathematica Policy Research.

Descargo de responsabilidad

Las opiniones y posiciones expresadas en esta guía práctica son las de los autores y no necesariamente representan las opiniones y posiciones del Instituto de Ciencias de la Educación o de los EE. UU. Departamento de Educación. Esta guía práctica debe revisarse y aplicarse de acuerdo con las necesidades específicas de los educadores y de la agencia educativa que la utiliza, y con plena conciencia de que representa los juicios del panel de revisión sobre lo que constituye una práctica sensata, con base en la investigación disponible. en el momento de la publicación. Esta guía práctica debe utilizarse como una herramienta para ayudar en la toma de decisiones y no como un "libro de cocina". Cualquier referencia dentro del documento a productos educativos específicos es ilustrativa y no implica la aprobación de estos productos con exclusión de otros productos a los que no se hace referencia.

Departamento de Educación de EE. UU.

Arne Duncan

Secretario

Instituto de Ciencias de la Educación

John Q. Easton
Director

Centro Nacional de Evaluación Educativa y Asistencia Regional

Rebeca Maynard
Notario

Septiembre 2010

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L. y Wray, J. (2010). Desarrollo de una instrucción eficaz de fracciones desde jardín de infantes hasta octavo grado: una guía práctica (NCEE #2010-4039). Washington, DC: Centro Nacional de Evaluación Educativa y Asistencia Regional, Instituto de Ciencias de la Educación, Departamento de Educación de EE. UU. Obtenido de whatworks.ed.gov/publications/practiceguides .

Las citas de la Guía de prácticas de What Works Clearinghouse comienzan con el presidente del panel, seguido de los nombres de los panelistas enumerados en orden alfabético.

Este informe está disponible en el sitio web de IES en http://ies.ed.gov/ncee y whatworks.ed.gov/publications/practiceguides .

Formatos alternativos

Si lo solicita, esta publicación puede estar disponible en formatos alternativos, como Braille, letra grande o disquete de computadora. Para obtener más información, comuníquese con el Centro de formatos alternativos al 202–260–0852 o al 202-260-0818.

Desarrollo de instrucción efectiva de fracciones desde jardín de infantes hasta octavo grado

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Lista de ejemplos

Revisión de recomendaciones

Recomendación 1.

Aproveche la comprensión informal de los estudiantes sobre compartir y proporcionalidad para desarrollar conceptos iniciales de fracciones.

- Usar actividades de reparto equitativo para presentar el concepto de fracciones. Utilice actividades para compartir que involucren dividir conjuntos de objetos, así como objetos enteros individuales.
- Ampliar las actividades de intercambio equitativo para desarrollar la comprensión de los estudiantes sobre el orden y la equivalencia. de fracciones.
- Aprovechar la comprensión informal de los estudiantes para desarrollar una comprensión más avanzada de los conceptos de razonamiento proporcional. Comience con actividades que involucren proporciones similares y avance a actividades que impliquen ordenar proporciones diferentes.

Recomendación 2.

Ayude a los estudiantes a reconocer que las fracciones son números y que expanden el sistema numérico más allá de los números enteros. Utilice rectas numéricas como herramienta de representación central para enseñar este y otros conceptos de fracciones desde los primeros grados en adelante.

- Usar actividades de medición y rectas numéricas para ayudar a los estudiantes a comprender que las fracciones son números, con todas las propiedades que comparten los números.
- Brinde oportunidades para que los estudiantes ubiquen y comparen fracciones en rectas numéricas.
- Utilice rectas numéricas para mejorar la comprensión de los estudiantes sobre la equivalencia de fracciones, la densidad de fracciones (el concepto de que hay un número infinito de fracciones entre dos fracciones cualesquiera) y las fracciones negativas.
- Ayude a los estudiantes a comprender que las fracciones se pueden representar como fracciones, decimales y fracciones comunes. centajes y desarrollar la capacidad de los estudiantes para traducir entre estas formas.

Recomendación 3.

Ayude a los estudiantes a comprender por qué tienen sentido los procedimientos para cálculos con fracciones.

- Utilice modelos de área, rectas numéricas y otras representaciones visuales para mejorar la comprensión de los estudiantes. de procedimientos computacionales formales.
- Brinde oportunidades para que los estudiantes utilicen la estimación para predecir o juzgar la razonabilidad de las respuestas a problemas que involucran cálculo con fracciones.
- Abordar conceptos erróneos comunes sobre procedimientos computacionales con fracciones.
- Presentar contextos del mundo real con números plausibles para problemas que involucran computación con fracciones.

Recomendación 4.

Desarrollar la comprensión conceptual de los estudiantes sobre las estrategias para resolver problemas de razones, tasas y proporciones antes de exponerlos a la multiplicación cruzada como un procedimiento a utilizar para resolver dichos problemas.

- Desarrollar la comprensión de los estudiantes sobre las relaciones proporcionales antes de enseñarles procedimientos computacionales que son conceptualmente difíciles de entender (por ejemplo, multiplicación cruzada). Aprovechar las estrategias de desarrollo de los estudiantes para resolver problemas de razones, tasas y proporciones.
- Anime a los estudiantes a usar representaciones visuales para resolver problemas de razones, tasas y proporciones.
- Proporcionar oportunidades para que los estudiantes usen y discutan estrategias alternativas para resolver proporciones, tasas, y problemas de proporción.

Recomendación 5.

Los programas de desarrollo profesional deberían dar alta prioridad a mejorar la comprensión de los profesores sobre las fracciones y sobre cómo enseñarlas.

- Desarrollar una comprensión profunda de las fracciones y los procedimientos computacionales que involucran fracciones en los maestros.
- Preparar a los maestros para utilizar representaciones pictóricas y concretas variadas de fracciones y operaciones con fracciones.
- Desarrollar la capacidad de los profesores para evaluar la comprensión y los malentendidos de las fracciones por parte de los estudiantes.

Expresiones de gratitud

El panel aprecia enormemente los esfuerzos de Jeffrey Max, Moira McCullough, Andrew Gothro y Sarah Prenovitz, personal de Mathematica Policy Research que participó en las reuniones del panel, resumió los hallazgos de la investigación y redactó la guía. Jeffrey Max y Moira McCullough tuvieron la responsabilidad principal de redactar y revisar la guía. También agradecemos a Shannon Monahan, Cassandra Pickens, Scott Cody, Neil Seftor, Kristin Hallgren y Alison Wellington por sus útiles comentarios y revisiones de versiones anteriores de la guía, y a Laura Watson-Sarnoski y Joyce Hofstetter. para formatear y producir la guía.

Robert Siegler (Presidente)
Thomas Carpintero
Francis (saltar) Fennell
David Geary
James Lewis
Yukari Okamoto
Laura Thompson
Jonathan Wray

Instituto de Ciencias de la Educación Niveles de evidencia para guías de práctica

Esta sección proporciona información sobre el papel de la evidencia en el Instituto de Ciencias de la Educación (IES) Guías de práctica de What Works Clearinghouse (WWC). Describe cómo los paneles de guías de práctica determinan el nivel de evidencia para cada recomendación y explica los criterios para cada uno de los tres niveles de evidencia (evidencia sólida, evidencia moderada y evidencia mínima).

El nivel de evidencia asignado a cada recomendación en esta guía práctica representa el juicio del panel sobre la calidad de la investigación existente para respaldar la afirmación de que cuando estas prácticas se implementaron en investigaciones anteriores, se observaron efectos positivos en los resultados de los estudiantes. Después de una revisión cuidadosa de los estudios que respaldan cada recomendación, los panelistas determinan el nivel de evidencia para cada recomendación utilizando los criterios de la Tabla 1 y la heurística de evidencia que se muestra en el Apéndice E. El panel primero considera la relevancia de los estudios individuales para la recomendación, y Luego analiza toda la base de evidencia, teniendo en cuenta:

- el número de estudios
- la calidad de los estudios
- si los estudios representan el rango de participantes y entornos en los que se centra la recomendación
- si los hallazgos de los estudios pueden ser atribuido a la práctica recomendada
- si los resultados de los estudios son consistentemente positivos

Una calificación de evidencia sólida se refiere a evidencia consistente de que las estrategias, programas o prácticas recomendados mejoran los resultados de los estudiantes para una amplia población de estudiantes. En otras palabras, existe una fuerte evidencia causal y generalizable.

Una calificación de evidencia moderada se refiere a evidencia de estudios que permiten conclusiones causales, pero no pueden generalizarse con seguridad a la población en la que se centra una recomendación (tal vez porque los hallazgos no se han replicado ampliamente) o a evidencia de estudios que son generalizables pero que tienen cierta ambigüedad causal. También podría ser que los estudios que existen no examinen específicamente los resultados de interés en la guía práctica, aunque pueden estar relacionados.

Una calificación de evidencia mínima sugiere que el panel no puede señalar un conjunto de investigaciones que demuestre el efecto positivo de la práctica en el rendimiento estudiantil. En algunos casos, esto simplemente significa que las prácticas recomendadas serían difíciles de estudiar de manera rigurosa y experimental;1 en otros casos, significa que los investigadores aún no han estudiado esta práctica, o que existen conocimientos débiles o conflictivos. evidencia de efectividad. Una calificación de evidencia mínima no indica que la recomendación sea menos importante que otras recomendaciones con una calificación de evidencia sólida o moderada.

Siguiendo las directrices de la WWC, los resultados mejorados se indican mediante un efecto positivo estadísticamente significativo o un tamaño del efecto positivo sustancialmente importante.2 La WWC define efectos sustancialmente importantes o grandes sobre los resultados como aquellos con tamaños de efecto superiores a 0,25 desviaciones estándar. En esta guía, el panel analiza hallazgos sustancialmente importantes como aquellos que contribuyen a la evidencia de la efectividad de las prácticas, incluso cuando esos efectos no son estadísticamente significa

Tabla 1. Niveles de evidencia del Instituto de Ciencias de la Educación para guías de práctica

Evidencia contundente

Una calificación de evidencia sólida significa que una investigación causal de alta calidad vincula esta práctica con resultados positivos en las escuelas y las aulas. La investigación descarta otras causas de los resultados positivos y las escuelas y aulas son similares a las que se dirigen en esta guía. Se demuestra evidencia sólida cuando una base de evidencia tiene las siguientes propiedades: •Alta validez interna: la base

de evidencia consta de diseños causales de alta calidad que cumplen con los estándares de la WWC. con o sin reservas.3

- Alta validez externa: la base de evidencia consta de una variedad de estudios con alta validez interna que representan envió la población en la que se centra la recomendación.4
- Efectos positivos consistentes sobre resultados relevantes sin evidencia contradictoria (es decir, no estadísticamente significativos). efectos negativos no significativos) en estudios con alta validez interna.
- Relevancia directa al alcance (es decir, validez ecológica), incluido el contexto relevante (por ejemplo, aula versus laboratorio). muestra (p. ej., edad y características) y resultados evaluados.
- Prueba directa de la recomendación en los estudios o la recomendación es un componente importante de las intervenciones evaluadas en los estudios.
- El panel tiene un alto grado de confianza en que esta práctica es efectiva.
- En el caso particular de las recomendaciones sobre evaluaciones, la base de evidencia cumple con Los Estándares para Pruebas educativas y psicológicas (Asociación Estadounidense de Investigación Educativa, Asociación Estadounidense de Psicología y Consejo Nacional de Medición en Educación, 1999).

Evidencia moderada

Una calificación de evidencia moderada significa que una investigación causal de alta calidad vincula esta práctica con resultados positivos en las escuelas y las aulas. Sin embargo, es posible que la investigación no descarte adecuadamente otras causas de los resultados positivos, o que las escuelas y aulas no sean similares a aquellas a las que se dirige esta guía. Se demuestra evidencia moderada cuando una base de evidencia tiene las siguientes

propiedades: • Alta validez interna pero validez externa moderada (es decir, estudios que respaldan conclusiones causales sólidas, pero la generalización es incierta) O estudios con validez externa alta pero validez interna moderada (es decir, estudios que respaldan la generalidad de una relación, pero la causalidad es incierta). •La investigación puede

incluir estudios que cumplan con los estándares de la WWC con o sin reservas con una muestra pequeña tamaños y/u otras condiciones de implementación o análisis que limiten la generalización.

- La investigación puede incluir estudios que respalden la generalidad de una relación pero que no cumplan con los estándares de la WWC;5 sin embargo, no tienen fallas importantes relacionadas con la validez interna, aparte de la falta de equivalencia demostrada en la prueba previa para estudios de diseño cuasiexperimentales (QED).). Los QED sin equivalencia deben incluir una covariable previa a la prueba como control estadístico del sesgo de selección. Estos estudios deben ir acompañados de al menos un estudio relevante que cumpla con los estándares WWC con o sin reservas. •Una

preponderancia de efectos positivos sobre los resultados relevantes. El panel debe discutir la evidencia contradictoria (es decir, efectos negativos estadísticamente significativos) y considerarla con respecto a su relevancia para el alcance de la guía y la intensidad de la recomendación como componente de la intervención evaluada. Si los resultados están fuera del alcance de la guía, esto también debe discutirse.

- El panel determinó que la investigación no alcanza el nivel de evidencia sólida pero es más convincente. que un nivel mínimo de evidencia.
- En el caso particular de las recomendaciones sobre evaluaciones, debe existir evidencia de confiabilidad que cumpla Los Estándares para Pruebas Educativas y Psicológicas, pero la evidencia de validez puede provenir de muestras que no son adecuadamente representativas de la población en la que se centra la recomendación.

(continuado)

Tabla 1. Niveles de evidencia del Instituto de Ciencias de la Educación para guías de práctica (continuación)

Evidencia mínima
Una calificación de evidencia mínima significa que el panel concluyó que se debe adoptar la práctica recomendada; sin embargo, el panel no puede señalar un conjunto de investigaciones causales que demuestren el efecto positivo de la recomendación y que alcancen el nivel de evidencia moderada o sólida.

En términos de los niveles de evidencia indicados en la Tabla 1, el panel se basó en los estándares de evidencia del WWC para evaluar la calidad de la evidencia que respalda los programas y prácticas educativos. WWC evalúa la evidencia de la validez causal de los programas y prácticas de instrucción de acuerdo con los estándares de WWC.

La información sobre estos estándares está disponible en http://ies.ed.gov/ncee/wwc/pdf/wwc_procedures_v2_standards_handbook.pdf . Los estudios elegibles que cumplen con los estándares de evidencia del WWC o que cumplen con los estándares de evidencia con reservas se indican en negrita en las notas finales y en las páginas de referencias.

Introducción

Introducción a la guía práctica para el desarrollo de la instrucción de fracciones efectivas desde jardín de infantes hasta octavo grado

Esta sección proporciona una descripción general de la importancia de desarrollar instrucciones efectivas sobre fracciones. ción para jardín de infantes hasta octavo grado y explica los parámetros clave considerados por el panel en el desarrollo de la guía práctica. También resume las recomendaciones para los lectores y concluye con una discusión de la investigación que respalda la guía práctica.

Las habilidades matemáticas de los estudiantes estadounidenses han sido deficientes durante muchos años, y las ramificaciones de este conocimiento inadecuado son ampliamente reconocidas.

El informe de 1983 Una nación en riesgo relacionó la seguridad y la prosperidad de Estados Unidos con su competencia matemática y advirtió que el conocimiento matemático de los estudiantes estadounidenses era insuficiente para enfrentar los desafíos del mundo moderno. Más de 25 años después, el rendimiento matemático de los estudiantes estadounidenses sigue estando muy por detrás del de los estudiantes del este de Asia y gran parte de Europa.[6] Sólo un pequeño porcentaje de los estudiantes estadounidenses posee el conocimiento matemático necesario para seguir carreras en ciencia, tecnología, ingeniería o matemáticas (STEM).[7] Muchos graduados de la escuela secundaria carecen de la competencia matemática para una amplia gama de trabajos bien remunerados en la economía actual.[8] Además, existen grandes brechas en el conocimiento de matemáticas entre los estudiantes de diferentes orígenes socioeconómicos y grupos raciales y étnicos dentro de los Estados Unidos.[9] Estas disparidades perjudican la economía nacional y también limitan las oportunidades ocupacionales y financieras de decenas de millones de estadounidenses.[10]

La mala comprensión de las fracciones es un aspecto crítico de este conocimiento matemático inadecuado. El conocimiento de las fracciones difiere aún más entre los estudiantes de Estados Unidos y los estudiantes del este de Asia que el conocimiento de los números enteros.[11] Esta brecha de aprendizaje es especialmente problemática porque comprender las fracciones es esencial para el álgebra y otras áreas más avanzadas de las matemáticas.[12]

Los profesores son conscientes de la dificultad de los estudiantes para aprender fracciones y, a menudo, se sienten frustrados por ello. En una encuesta nacional reciente, los profesores de Álgebra I calificaron a sus estudiantes como tener "muy mala preparación en números racionales y operaciones con fracciones y decimales".[13] Los profesores de álgebra clasificaron la mala comprensión de las fracciones como una de las dos debilidades más importantes en la preparación de los estudiantes para su curso.

Muchos ejemplos ilustran la débil comprensión de las fracciones por parte de los estudiantes estadounidenses. En la Evaluación Nacional del Progreso Educativo (NAEP) de 2004, el 50% de los estudiantes de octavo grado no podían ordenar tres fracciones de menor a mayor.[14] El problema no se limita a los números racionales escritos en notación fraccionaria común. En la NAEP de 2004, menos del 30% de los jóvenes de 17 años tradujeron correctamente 0,029 como 29/1000.[15] La misma dificultad es evidente en las pruebas individuales de estudiantes en entornos experimentales controlados: cuando se les pregunta cuál de dos decimales, 0,274 y 0,83, es mayor, la mayoría de los estudiantes de 5.º y 6.º grado eligen 0.274.[16]

Estos ejemplos y otros llevaron a los autores de esta guía a concluir lo siguiente:

> Un alto porcentaje de estudiantes estadounidenses carecen de comprensión conceptual de las fracciones, incluso después de estudiar fracciones durante varios años; esto, a su vez, limita la capacidad de los estudiantes para resolver problemas con fracciones y para aprender y aplicar procedimientos computacionales que involucran fracciones.

La falta de comprensión conceptual tiene varias facetas, entre ellas

- No ver las fracciones como números en absoluto, pero más bien como símbolos sin significado que necesitan ser manipulados de manera arbitraria para producir respuestas que satisfagan al maestro.

- Centrándose en numeradores y denominadores como números separados en lugar de pensar en la fracción como un solo número. Errores como creer que 3/8 > 3/5 surgen al comparar los dos denominadores e ignorar la relación esencial entre el numerador de cada fracción y su denominador.

- Confundir propiedades de fracciones con los de números enteros. Esto es evidente en la afirmación de muchos estudiantes de secundaria de que así como no existe un número entero entre 5 y 6, tampoco existe ningún número de ningún tipo entre 5/7 y 6/7. 17

Esta guía práctica presenta cinco recomendaciones destinadas a ayudar a los educadores a mejorar la comprensión de los estudiantes y el éxito en la resolución de problemas con fracciones. Las recomendaciones surgen de propuestas sobre cómo desarrollar una comprensión rudimentaria de las fracciones en los niños pequeños; a ideas para ayudar a los niños mayores a comprender el significado de las fracciones y los cálculos que involucran fracciones; a propuestas destinadas a ayudar a los estudiantes a aplicar su comprensión de fracciones para resolver problemas que involucran razones, tasas y proporciones. Mejorar el aprendizaje de los estudiantes sobre fracciones requerirá que los profesores dominen la materia y su capacidad para ayudar a los estudiantes a dominarla; por lo tanto, también se incluye una recomendación sobre la formación docente.

Las recomendaciones de la guía práctica fueron desarrolladas por un panel de ocho investigadores y profesionales con experiencia en diferentes aspectos del tema. Los panelistas incluyen a un matemático activo en temas relacionados con la formación de docentes de matemáticas; tres educadores matemáticos, uno de los cuales ha sido presidente del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas; dos psicólogos cuyas investigaciones se centran en cómo los niños aprenden matemáticas; y dos profesionales que enseñaron matemáticas en aulas de escuelas primarias y secundarias y supervisaron a otros profesores de matemáticas de escuelas primarias y secundarias.

Los miembros del panel trabajaron en colaboración para desarrollar recomendaciones basadas en la mejor evidencia de investigación disponible y en sus experiencia y conocimientos combinados en materia de enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

Alcance de la guía práctica.

Escribir esta guía requirió decisiones con respecto a la audiencia prevista, qué niveles de grado examinar, qué habilidades y conocimientos considerar y qué términos usar para describir la investigación y las recomendaciones. El panel optó sistemáticamente por hacer que la guía fuera lo más inclusiva posible.

Audiencia y nivel de grado. El público objetivo son profesores de escuelas primarias y secundarias, supervisores de matemáticas, líderes docentes, especialistas, entrenadores, directores, padres, formadores de docentes y otras personas interesadas en mejorar el aprendizaje de matemáticas de los estudiantes. Los niveles de grado enfatizados son desde jardín de infantes hasta octavo grado; casi toda la enseñanza de fracciones se lleva a cabo dentro de este período, y esta es la población estudiada en la mayoría de las investigaciones disponibles. La guía se centra no sólo en el cálculo con fracciones, sino también en habilidades que reflejan la comprensión de las fracciones, como estimar las posiciones de las fracciones en rectas numéricas y comparar los tamaños de las fracciones, porque la falta de dicha comprensión subyace a muchas de las otras dificultades del estudio. -Tiene abolladuras con fracciones.

Contenido. Este documento utiliza el término fracciones en lugar de números racionales. El término fracciones se refiere a toda la gama de formas de expresar números racionales, incluidos decimales, porcentajes y fracciones negativas. El panel hace recomendaciones sobre esta gama completa de números racionales porque la comprensión de los estudiantes sobre ellos es fundamental para el uso de fracciones en contexto.

El carácter inclusivo de la guía se hace aún más evidente en su énfasis en la necesidad de que los estudiantes puedan realizar operaciones computacionales con fracciones; comprender estas operaciones computacionales; y comprender, de manera más amplia, qué representan las fracciones.

Para ayudar a los estudiantes a comprender toda la gama de fracciones, el panel sugiere que los educadores transmitan de manera efectiva lo siguiente:

- Fracciones, decimales y porcentajes comunes son formas equivalentes de expresar un mismo número (42/100 = 0,42 = 42%).
- Los números enteros son un subconjunto de los racionales. números.
- Cualquier fracción se puede expresar en forma número infinito de formas equivalentes (3/4 = 6/8 = 9/12 = 0,75 = 75%, etc.).

En esta guía se tratan tanto las fortalezas que los estudiantes aportan a la tarea de aprender sobre fracciones como los desafíos que a menudo dificultan el aprendizaje. Los niños ingresan a la escuela con una comprensión rudimentaria de compartir y proporcionalidad, conceptos que los maestros pueden aprovechar para producir una comprensión más avanzada de las fracciones.18 El alcance de la guía incluye la descripción de estos conceptos de desarrollo temprano y cómo se puede desarrollar una comprensión más avanzada a partir de ellos. . La guía también describe conceptos erróneos comunes sobre las fracciones que interfieren con el aprendizaje de los estudiantes (por ejemplo, la idea errónea de que multiplicar dos números debe dar como resultado un número mayor) y cómo se pueden superar esos conceptos erróneos.

Finalmente, la guía aborda no sólo la necesidad de mejorar la comprensión de las fracciones por parte de los estudiantes, sino también la necesidad de mejorar la comprensión de las mismas por parte de los profesores. Demasiados profesores estadounidenses pueden aplicar algoritmos computacionales estándar para resolver problemas que involucran fracciones, pero no saben por qué funcionan esos algoritmos o cómo evaluar y explicar por qué los procedimientos alternativos que generan sus estudiantes son correctos o incorrectos.19 De manera similar, muchos profesores pueden explicar interpretaciones parte-todo de fracciones, pero no otras interpretaciones esenciales, como considerar fracciones como medidas de cantidades que ofrecen precisión más allá de la que ofrecen los números enteros o ver fracciones como cocientes.

La comprensión de las fracciones por parte de los docentes estadounidenses está muy por detrás de la de los docentes de países que producen un mejor aprendizaje de las fracciones por parte de los estudiantes, como Japón y China.20 Aunque parte de la información contenida en esta guía está dirigida a profundizar la comprensión de las fracciones por parte de los docentes, los profesionales También parecen esenciales las actividades de desarrollo que mejoren la comprensión de las fracciones por parte de los profesores y los procedimientos computacionales que involucran fracciones.

Resumen de las recomendaciones

Esta guía práctica incluye cinco recomendaciones para mejorar el aprendizaje de fracciones de los estudiantes. La primera recomendación tiene como objetivo desarrollar el conocimiento fundamental de los estudiantes jóvenes, las tres siguientes se dirigen a los estudiantes mayores a medida que avanzan en sus años de escuela primaria y secundaria, y la recomendación final se centra en aumentar la capacidad de los profesores para ayudar a los estudiantes a comprender las fracciones. Aunque las recomendaciones varían en sus detalles, las cinco reflejan la perspectiva de que la comprensión conceptual de las fracciones es esencial para que los estudiantes aprendan sobre el tema, recuerden lo que aprendieron y apliquen este conocimiento para resolver problemas que involucran fracciones. .

Los educadores pueden adoptar de manera rentable algunas de las recomendaciones sin adoptarlas todas, pero creemos que el mayor beneficio provendrá de adoptar todas las recomendaciones que sean relevantes para sus clases.

- La recomendación 1 es aprovechar los estudios comprensión informal de los estudiantes de compartir y proporcionalidad para desarrollar conceptos de fracción inicial. El aprendizaje suele ser más eficaz cuando se basa en el conocimiento existente, y las fracciones no son una excepción. Cuando los niños comienzan la escuela, la mayoría ha desarrollado una comprensión básica de compartir que les permite dividir una región o un conjunto de objetos por igual entre dos o más personas. Estas actividades de compartir se pueden utilizar para ilustrar conceptos como mitades, tercios y cuartos, así como conceptos más generales relevantes para fracciones, como ya que aumentar el número de personas entre las que se divide un objeto da como resultado una fracción menor del objeto para cada persona. De manera similar, la comprensión temprana de las proporciones puede ayudar a los niños de jardín de infantes a comparar, por ejemplo, en qué se diferencian un tercio de las áreas de un cuadrado, un rectángulo y un círculo.

- La recomendación 2 es garantizar que Los estudiantes saben que las fracciones son números que expanden el sistema numérico más allá de los números enteros y usan las rectas numéricas como una herramienta de representación clave para transmitir este y otros conceptos de fracciones desde los primeros grados en adelante. Aunque a la mayoría de los adultos les parece obvio que las fracciones son números, muchos estudiantes de la escuela secundaria y posteriores no pueden identificar cuál de dos fracciones es mayor, lo que indica que, en el mejor de los casos, tienen un conocimiento superficial. Las rectas numéricas son particularmente ventajosas para evaluar el conocimiento de fracciones y para enseñarles a los estudiantes. Proporcionan una herramienta común para representar los tamaños de fracciones, decimales y porcentajes comunes; fracciones positivas y negativas; fracciones menores que uno y mayores que uno; y fracciones equivalentes y no equivalentes. Las rectas numéricas también son una forma natural de presentar a los estudiantes la idea de las fracciones como medidas de cantidad, una idea importante a la que se debe dar mayor énfasis en muchas aulas estadounidenses.

- La recomendación 3 es ayudar a los estudiantes a comprender por qué tienen sentido los procedimientos para cálculos con fracciones. Muchos estudiantes estadounidenses, e incluso profesores, no pueden explicar por qué los denominadores comunes son necesarios para sumar y restar fracciones, pero no para multiplicarlas y dividirlas. Pocos pueden explicar la "regla de invertir y multiplicar" o por qué dividir por una fracción puede dar como resultado un cociente mayor que el número que se divide. A veces los estudiantes aprenden procedimientos computacionales de memoria, pero también suelen olvidarlas rápidamente o confundirse con estas rutinas; esto es lo que tiende que suceda con los algoritmos de fracciones. Los algoritmos que se olvidan y confunden ocurren con menos frecuencia cuando los estudiantes comprenden cómo y por qué los procedimientos computacionales arrojan respuestas correctas.

- La recomendación 4 implica centrarse en problemas que involucran razones, tasas y proporciones. Estas aplicaciones de conceptos de fracciones a menudo resultan difíciles para los estudiantes. Para aprender álgebra es importante ilustrar cómo se pueden usar diagramas y otras representaciones visuales para resolver problemas de razones, tasas y proporciones y enseñar a los estudiantes a usarlos. También es útil brindar instrucción sobre cómo traducir enunciados en problemas planteados en expresiones matemáticas que involucran razones, tasas y proporciones. Estos temas incluyen formas en las que es probable que los estudiantes utilicen fracciones a lo largo de sus vidas; es importante que comprendan la conexión entre estos usos aplicados de las fracciones y los conceptos y procedimientos relacionados con fracciones que aprenden en el aula.

- La recomendación 5 insta al maestro programas de educación y desarrollo profesional para enfatizar cómo mejorar la comprensión de las fracciones por parte de los estudiantes y para garantizar que los maestros tengan suficiente comprensión de las fracciones para lograr este objetivo. Demasiados profesores tienen dificultades para explicar interpretaciones de fracciones distintas de la interpretación parte-todo, que es útil en algunos contextos pero no en otros. Aunque muchos profesores pueden describir algoritmos convencionales para resolver problemas de fracciones, pocos pueden justificarlos, explicar por qué dan respuestas correctas o explicar por qué algunos procedimientos no estándar que generan los estudiantes dan respuestas correctas a pesar de no parecerse a un algoritmo convencional. Una mayor comprensión de las fracciones, el conocimiento de las concepciones y conceptos erróneos de los estudiantes sobre las fracciones y prácticas efectivas para enseñar fracciones son de vital importancia para mejorar la instrucción en el aula.

Uso de la investigación

Las recomendaciones de esta guía práctica se basan en numerosos tipos de evidencia, incluidas evaluaciones nacionales e internacionales del conocimiento matemático de los estudiantes, un estudio de las opiniones de los profesores sobre los mayores problemas en la preparación de sus estudiantes para el aprendizaje de álgebra, análisis de los matemáticos sobre conceptos clave para comprender fracciones, estudios descriptivos de estudiantes exitosos y no exitosos de fracciones y evaluaciones experimentales controladas de intervenciones diseñadas para mejorar el aprendizaje de fracciones.

La base de investigación de la guía se identificó a través de una búsqueda exhaustiva de estudios durante los últimos 20 años que evaluaron la enseñanza y el aprendizaje sobre fracciones. Esta búsqueda se realizó a partir de una gran cantidad de palabras clave relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de fracciones sugeridas por los miembros del panel; Los resultados se complementaron con estudios específicos conocidos por los miembros del panel que no fueron identificados por la búsqueda en la base de datos, incluidos trabajos anteriores. El proceso arrojó más de 3.000 citaciones. De estos, 132 cumplieron con los criterios de revisión de la WWC, 33 cumplieron con los estándares de validez causal de la WWC y 20 de los 33 cumplieron con los estándares de validez causal de la WWC y fueron relevantes para las recomendaciones del panel.

En algunos casos, las recomendaciones se basan en investigaciones tan rigurosas. Pero cuando la investigación fue escasa o no cumplió con los estándares de la WWC, las recomendaciones reflejan lo que el panel de esta guía cree que son las mejores prácticas, basadas en enfoques de instrucción que se han implementado con éxito en estudios de casos o en planes de estudio que no han sido evaluados rigurosamente. El panel no pudo cumplir su deseo de basar todas las recomendaciones en estudios que cumplieran con los estándares de la WWC, en gran parte porque hay mucha menos investigación disponible sobre fracciones que sobre el desarrollo de habilidades y conceptos relacionados con números enteros. Por ejemplo, el Segundo Manual de Investigación sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, 2007) incluye 109 citas de investigaciones publicadas en 2000 o después sobre números enteros, pero sólo nueve citas de investigaciones sobre fracciones publicadas durante el mismo período. Los estudios de alta calidad que probaron la efectividad de técnicas de instrucción específicas con fracciones fueron especialmente escasos. Claramente se necesita una mayor cantidad de investigación de alta calidad sobre fracciones, especialmente estudios que comparen la efectividad de formas alternativas de enseñar a los niños sobre fracciones.

La Tabla 2 muestra cada recomendación y la solidez de la evidencia que la respalda según lo determinado por el panel. Siguiendo las recomendaciones y sugerencias para llevar a cabo las recomendaciones, el Apéndice D presenta más información sobre la evidencia de investigación que respalda cada recomendación.

Tabla 2. Recomendaciones y niveles de evidencia correspondientes

Recomendación	Niveles de evidencia: Mínimo Evidencia	Niveles de evidencia: Moderado Evidencia	Niveles de evidencia: Fuerte Evidencia
1. Aprovechar la comprensión informal de los estudiantes sobre compartir y proporcionalidad para desarrollar conceptos iniciales de fracciones.			
2. Ayude a los estudiantes a reconocer que las fracciones son números y que expanden el sistema numérico más allá de los números enteros. Utilice rectas numéricas como herramienta de representación central para enseñar este y otros conceptos de fracciones desde los primeros grados en adelante.			
3. Ayude a los estudiantes a comprender por qué tienen sentido los procedimientos para cálculos con fracciones.			
4. Desarrollar la comprensión conceptual de los estudiantes sobre las estrategias para resolver problemas de razones, tasas y proporciones antes de exponerlos a la multiplicación cruzada como un procedimiento a utilizar para resolver dichos problemas.			
5. Los programas de desarrollo profesional deben dar una alta importancia prioridad en mejorar la comprensión de los profesores sobre las fracciones y sobre cómo enseñarlas.			

Recomendación 1

Aproveche la comprensión informal de los estudiantes sobre compartir y proporcionalidad para desarrollar conceptos iniciales de fracciones.

Los estudiantes llegan al jardín de infantes con una comprensión rudimentaria de los conceptos básicos de fracciones. Pueden compartir un conjunto de objetos por igual entre un grupo de personas (es decir, compartir equitativamente)21 e identificar proporciones equivalentes de formas comunes (es decir, razonamiento proporcional).22

Al utilizar este conocimiento temprano para introducir fracciones, los maestros permiten a los estudiantes desarrollar lo que ya saben. Esto facilita las conexiones entre el conocimiento intuitivo de los estudiantes y los conceptos de fracciones formales. El panel recomienda utilizar actividades de intercambio para desarrollar la comprensión de los estudiantes sobre el orden y las relaciones de equivalencia entre fracciones.

Las actividades para compartir pueden presentar a los niños varias de las interpretaciones básicas de las fracciones analizadas en la introducción. Compartir se puede presentar en términos de división, por ejemplo, dividiendo 12 dulces en cuatro grupos igualmente numerosos. La participación también se puede presentar en términos de proporciones; por ejemplo, si dos niños comparten tres pasteles, la relación entre el número de pasteles y el número de niños es 3:2.

Aunque las fracciones normalmente se introducen en 1.º o 2.º grado, tanto las actividades de compartir como las de razonamiento proporcional descritas en esta recomendación pueden comenzar desde el preescolar o el jardín de infantes.

Resumen de evidencia: evidencia mínima

Esta recomendación se basa en estudios que muestran que los estudiantes tienen una comprensión temprana de lo que es compartir y proporcionalidad23. y en estudios de instrucción que utilizan escenarios compartidos para enseñar conceptos de fracciones.24 Sin embargo, ninguno de los estudios que utilizaron escenarios compartidos para enseñar conceptos de fracciones cumplió con los estándares de la WWC. A pesar de la evidencia limitada, la

El panel cree que el conocimiento informal de los estudiantes sobre cómo compartir y proporcionalidad proporciona una base para introducir y enseñar conceptos de fracciones.

Compartir igualitariamente. Los niños tienen una comprensión temprana de cómo crear partes iguales. A los 4 años, los niños pueden distribuir cantidades iguales de objetos del mismo tamaño entre un pequeño número de destinatarios, y la capacidad de compartir equitativamente mejora con la edad.25 Compartir un conjunto de objetos discretos (p. ej., 12 uvas compartidas entre tres niños) tiende a Puede ser más fácil para los niños pequeños que compartir un solo objeto (por ejemplo, una barra de chocolate), pero a los 5 o 6 años, los niños son razonablemente hábiles en ambos.26

Los estudios de caso muestran cómo una comprensión temprana de compartir podría usarse para enseñar fracciones a estudiantes de primaria.27 En dos estudios, los maestros plantearon problemas narrativos con escenarios de compartir para enseñar conceptos de fracciones como equivalencia y ordenación, así como cálculo de fracciones. . Los estudios informaron efectos positivos sobre el conocimiento de fracciones, pero no proporcionan evidencia rigurosa sobre el impacto de la instrucción basada en actividades compartidas.

Relaciones proporcionales. El panel cree que las prácticas educativas pueden aprovechar el conocimiento rudimentario de proporcionalidad de los niños pequeños para enseñar conceptos de fracciones. Esta temprana comprensión de la proporcionalidad se ha demostrado de diferentes maneras. A los 6 años, los niños pueden correlacionar proporciones equivalentes representadas por diferentes figuras geométricas y por objetos cotidianos de diferentes formas.28 La mitad es un punto de referencia importante al comparar proporciones; Los niños tienen más éxito en comparaciones en las que una proporción es más de la mitad y la otra es menos de la mitad, que en comparaciones en las que ambas proporciones son más de la mitad o ambas son menos de la mitad (por ejemplo, comparar 1/3 con 3/5) . es más fácil que comparar 2/3 con 4/5).29 Además, los niños pueden completar analogías basadas en relaciones proporcionales; por ejemplo, medio círculo es a medio rectángulo como un cuarto de círculo a un cuarto de rectángulo.30

Aunque hay evidencia que describe el conocimiento de proporcionalidad de los niños pequeños, ningún estudio riguroso que cumpla con los estándares de la WWC ha examinado si este conocimiento de desarrollo temprano puede usarse para mejorar la enseñanza de conceptos de fracciones.

Cómo llevar a cabo la recomendación

1. Utilice actividades de reparto equitativo para presentar el concepto de fracciones. Utilice actividades para compartir que impliquen dividir conjuntos de objetos, así como objetos enteros individuales.

El panel recomienda que los profesores ofrezcan una progresión de actividades para compartir que se base en las estrategias existentes de los estudiantes para dividir objetos. Los profesores deben comenzar con actividades que impliquen compartir equitativamente un conjunto de objetos entre un grupo de destinatarios y avanzar hasta compartir escenarios que requieran dividir un objeto o un conjunto de objetos en partes fraccionarias. Además, las primeras actividades deben basarse en la estrategia de los estudiantes de dividir algo en dos conjuntos o partes iguales antes de que los estudiantes divida los objetos entre un mayor número de recipientes. Se debe alentar a los estudiantes a usar fichas (por ejemplo, frijoles, fichas), crear dibujos o confiar en otras representaciones para resolver estos problemas de compartir; entonces

Los maestros pueden introducir nombres formales de fracciones (p. ej., un tercio, un cuarto, tercios, cuartos) y hacer que los niños etiqueten sus dibujos para nombrar las partes compartidas de un objeto (p. ej., 1/3 o 1/8 de una pizza). Para lograr un éxito óptimo, los niños deben participar en una variedad de actividades de etiquetado, no sólo una o dos.

Compartir un conjunto de objetos. Inicialmente, los profesores deberían pedir a los estudiantes que resuelvan problemas que involucren a dos o más personas compartiendo un conjunto de objetos (ver Figura 1). Los problemas deben incluir conjuntos de objetos que puedan dividirse equitativamente entre los participantes, de modo que no queden objetos restantes que deban dividirse en partes fraccionarias.

En estos primeros problemas de compartir, los profesores deben describir el número de artículos y el número de destinatarios que comparten esos artículos, y los estudiantes deben determinar cuántos artículos recibe cada persona.31 Los profesores podrían entonces plantear el mismo problema con un número cada vez mayor de destinatarios.32 Es importante enfatizar que estos problemas requieren compartir un conjunto de objetos por igual, de modo que los estudiantes se concentren en darle a cada persona la misma cantidad de objetos.

Particionar un solo objeto. A continuación, los profesores deben plantear problemas de compartir que resulten en que los estudiantes dividan uno o más objetos en partes iguales. El enfoque de estos problemas pasa de preguntar a los estudiantes cuántas cosas debería recibir cada persona a preguntarles qué cantidad de un objeto debería recibir cada persona. Por ejemplo, cuando dos niños comparten una galleta, los estudiantes tienen que pensar sobre la cantidad de galleta que debe recibir cada niño.

Los maestros pueden comenzar con problemas que involucran a varias personas compartiendo un solo objeto (p. ej., cuatro personas compartiendo una manzana) y avanzar a problemas en los que varias personas comparten un conjunto de objetos que deben dividirse en partes más pequeñas para compartirlos por igual (p. ej., tres personas compartiendo cuatro manzanas). Los problemas que implican compartir un objeto dan como resultado fracciones unitarias (p. ej., 1/3, 1/4, 1/9), mientras que los escenarios con varias personas y objetos a menudo resultan en fracciones no unitarias (p. ej., 3/4). .33 Esta distinción entre fracciones unitarias y no unitarias es importante, porque cuando las fracciones se reducen a sus términos más bajos, las fracciones no unitarias se componen de fracciones unitarias (p. ej., 3/4 = 1/4 + 1/4 + 1 /4), pero no ocurre lo contrario. Compartir situaciones que resultan en fracciones unitarias proporciona un punto de pa

Figura 1. Compartir un conjunto de objetos de manera uniforme entre los destinatarios

Problema

Tres niños quieren compartir 12 galletas para que cada niño reciba la misma cantidad de galletas. Cómo ¿Cuántas galletas debe recibir cada niño?

Ejemplos de estrategias de solución

Los estudiantes pueden resolver este problema dibujando tres figuras para representar a los niños y luego dibujando galletas junto a cada figura, dándole una galleta al primer niño, una al segundo y una al tercero, continuando hasta que hayan distribuido 12. galletas a los tres niños y luego contar el número de galletas distribuidas a cada niño. Otros estudiantes pueden resolver el problema simplemente repartiendo las galletas en tres montones, como si estuvieran repartiendo cartas.

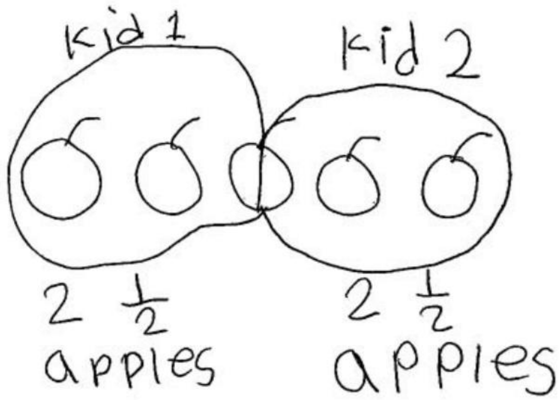
Figura 2. Partición de objetos individuales y múltiples

Problema

Dos niños quieren compartir cinco manzanas del mismo tamaño para que ambos tengan la misma cantidad para comer. Haga un dibujo para mostrar lo que cada niño debe recibir.

Ejemplos de estrategias de solución

Los estudiantes podrían resolver este problema dibujando cinco círculos para representar las cinco manzanas y dos figuras para representar a los dos niños. Luego, los estudiantes podrían dibujar líneas que conecten a cada niño con dos manzanas. Finalmente, podrían trazar una línea que divida la última manzana en dos partes aproximadamente iguales y trazar una línea desde cada parte hasta los dos niños. Alternativamente, como en la imagen de la derecha, los niños pueden dibujar un círculo grande que represente a cada niño, dos manzanas dentro de cada círculo y una quinta manzana a horcajadas sobre los círculos que represente a los dos niños. En otra posibilidad más, los niños podrían dividir cada manzana en dos partes y luego conectar cinco medias manzanas a la representación de cada figura.



para introducir nombres de fracciones, especialmente porque algunos niños piensan que todas las partes fraccionarias se llaman un medio.[34]

El panel también sugiere comenzar con problemas que impliquen compartir entre dos, cuatro u ocho personas (es decir, potencias de dos).[35] Esto permite a los estudiantes crear partes iguales usando una estrategia de división por la mitad: dividir un objeto por la mitad, dividir el mitades resultantes por la mitad, y así sucesivamente, hasta que haya suficientes piezas para compartir (ver Figura 2).[36] Con el tiempo, los estudiantes deben resolver problemas de compartir para los cuales No se puede utilizar una estrategia de reducción a la mitad. Por ejemplo, dividir un brownie en tercios requiere que los estudiantes anticipen cómo cortar el brownie para que quede en tres partes iguales. Los estudiantes pueden verse tentados a utilizar la división repetida por la mitad para todos los problemas de compartir, pero los maestros deben ayudarlos a desarrollar otras estrategias para dividir un objeto. Un enfoque es hacer que los estudiantes coloquen palos de madera sobre formas concretas, representando los palos las rebanadas o cortes que un estudiante haría para dividir el objeto.[37]

2. Ampliar las actividades de reparto equitativo para desarrollar la comprensión de los estudiantes sobre el orden y la equivalencia de fracciones.

Los profesores pueden ampliar los tipos de actividades para compartir descritas en el paso anterior para desarrollar la comprensión de los estudiantes sobre cómo ordenar e identificar fracciones equivalentes. El enfoque general sigue siendo el mismo: los profesores plantean problemas narrativos que involucran a un grupo de personas comparten objetos y los estudiantes crean dibujos u otras representaciones para resolver los problemas. Sin embargo, los profesores utilizan escenarios que requieren comparaciones de fracciones o identificación de fracciones equivalentes y se centran en diferentes aspectos de las soluciones de los estudiantes.

Se pueden utilizar actividades para compartir para ayudar a los estudiantes a comprender el tamaño relativo de las fracciones. Los profesores pueden presentar escenarios de intercambio con un número cada vez mayor de destinatarios y hacer que los estudiantes comparen el tamaño relativo de cada participación resultante. Por ejemplo, los estudiantes pueden comparar el tamaño de las piezas que resultan al compartir una barra de chocolate por igual entre tres, cuatro, cinco o seis niños.38 Los maestros deben alentar a los estudiantes a notar que a medida que aumenta el número de personas que comparten los objetos, el la cantidad de la parte que corresponde a cada persona disminuye; luego deben vincular esta idea a los nombres de fracciones formales y alentar a los estudiantes a comparar las piezas fraccionarias usando nombres de fracciones (por ejemplo, 1/3 de un objeto es mayor que 1/4 del mismo).

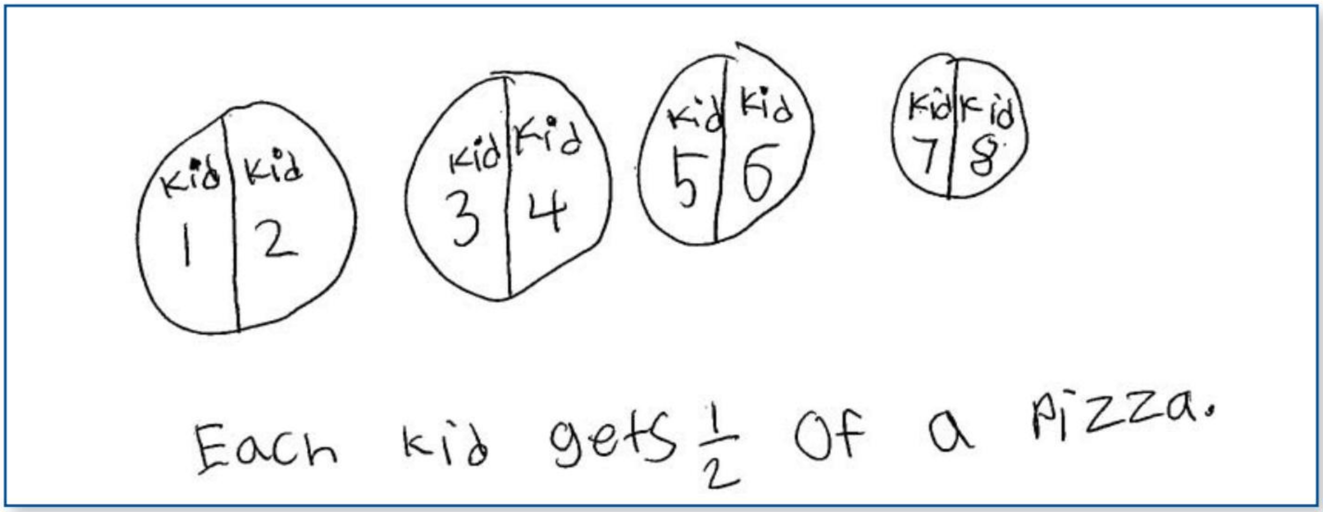
Al utilizar escenarios de compartir para discutir fracciones equivalentes, los maestros deben considerar dos enfoques, los cuales deben usarse con escenarios en los que el número de participantes y el número de piezas a compartir tengan uno o más factores comunes (por ejemplo, cuatro pizzas compartidas entre ocho hijos):

- Dividir objetos en más grandes o más pequeños piezas. Una forma de entender las acciones equivalentes es discutir formas alternativas de dividir y recibir las mismas acciones.39 Los estudiantes pueden pensar en cómo resolver un escenario de participación usando diferentes particiones para producir acciones iguales. Tal partición puede requerir prueba y error por parte de los estudiantes para identificar qué agrupaciones resultan en partes iguales. Los estudiantes pueden combinar piezas más pequeñas para hacer otras más grandes o dividir las más grandes en piezas más pequeñas. Por ejemplo, para resolver el problema de ocho niños que comparten cuatro pizzas, los estudiantes podrían dividir las cuatro pizzas en octavos y luego darle a cada niño cuatro trozos de tamaño 1/8. Alternativamente, los estudiantes podrían dividir cada pizza en cuartos y darle a cada persona 2/4, o dividir cada pizza en mitades y distribuir 1/2 a cada niño.

  Los estudiantes deben comprender que, aunque existen diferentes formas de dividir la pizza, cada método de partición da como resultado porciones equivalentes.

- Particionar el número de partícipes y el número de artículos. Otra forma de ayudar a los estudiantes a comprender la equivalencia es dividir el número de participantes y objetos.40 Por ejemplo, si los estudiantes llegan a 4/8 para el problema del párrafo anterior, el maestro podría preguntar cómo cambiaría el problema si el grupo Se dividieron en dos mesas y en cada mesa cuatro niños compartieron dos pizzas. Los estudiantes pueden comparar la nueva solución de 2/4 con su solución original de 4/8 para demostrar que las dos cantidades son equivalentes (consulte la Figura 3). Para aclarar el punto, los ocho niños podrían sentarse en cuatro mesas, con dos niños en cada mesa compartiendo una sola pizza, y alcanzando el concepto más familiar de 1/2.

Figura 3. Trabajo de un estudiante para compartir cuatro pizzas entre ocho niños



Otra forma de enseñar fracciones equivalentes con escenarios de compartir es plantear un problema de valor faltante en el que los niños determinan la cantidad de objetos necesarios para crear una porción equivalente. Por ejemplo, si seis niños comparten ocho naranjas en una mesa, ¿cuántas naranjas se necesitan en una mesa de tres niños para garantizar que cada niño reciba la misma cantidad?41 El problema podría extenderse a mesas con 12 niños, 24 niños o 9 niños. Para resolver estos problemas, los estudiantes podrían identificar cuánto recibe un niño en el primer escenario y aplicarlo al segundo escenario. Como alternativa, podrían usar la estrategia descrita anteriormente y dividir los seis niños y las ocho naranjas de la mesa original en dos tablas, de modo que el número de niños y naranjas de la mesa original

La primera mesa nueva es igual al número de niños y naranjas en la segunda mesa nueva.

Aquí hay otro ejemplo que permite a los estudiantes explorar el concepto de división equitativa: si 24 niños salen a comer sándwiches y se han pedido 16 sándwiches, ¿cuáles son las diferentes maneras en que los niños podrían sentarse en las mesas y dividir los sándwiches para que todos queden? recibir la misma cantidad? Las opciones podrían incluir tener una mesa grande con 24 niños y 16 sándwiches, tener cuatro mesas con seis niños y cuatro sándwiches en cada una, ocho mesas con tres niños y dos sándwiches en cada una, etc.

3. Aprovechar la comprensión informal de los estudiantes para desarrollar una comprensión más avanzada de los conceptos de razonamiento proporcional. Comience con actividades que involucren proporciones similares y avance a actividades que impliquen ordenar proporciones diferentes.

La instrucción temprana puede aprovechar la comprensión informal de los estudiantes para desarrollar conceptos básicos relacionados con el razonamiento proporcional. Inicialmente, los profesores deben plantear problemas que animen a los estudiantes a pensar en las relaciones proporcionales entre pares de objetos, sin especificar necesariamente cantidades exactas. Por ejemplo, los maestros podrían usar la historia de Ricitos de oro y los tres osos para discutir cómo el oso grande necesita una silla grande, el oso mediano necesita una silla mediana y el oso pequeño necesita una silla pequeña.42

La siguiente lista proporciona ejemplos de diferentes relaciones relevantes para el razonamiento proporcional temprano que se pueden explorar con los estudiantes:

- Relaciones proporcionales. Los profesores pueden discutir historias o escenarios que presenten relaciones proporcionales básicas que no están cuantificadas. Por ejemplo, una clase podría discutir la cantidad de estudiantes que se necesitarían para equilibrar un balancín con uno, dos o tres adultos en un extremo. Crear mezclas de líquidos cada vez menos saturados con mezcla de limonada o comida

  La coloración puede facilitar las discusiones sobre la comparación de la fuerza o concentración de diferentes mezclas.

- Covariación. Los maestros deben discutir problemas que involucran que una cantidad aumente a medida que aumenta otra cantidad. Los ejemplos podrían incluir la relación entre la altura y la talla de la ropa o entre la longitud del pie y la talla del zapato.43

- Patrones. Los patrones repetitivos simples pueden resultar útiles para analizar el concepto de proporción. Por ejemplo, los estudiantes podrían completar un patrón como estrella azul, estrella azul, cuadrado rojo, estrella azul, estrella azul, cuadrado rojo, estrella azul, estrella azul, cuadrado rojo, etc.44 Los maestros pueden luego discutir cuántas Hay estrellas azules para cada cuadrado rojo, pida a los estudiantes que organicen las estrellas y los cuadrados para mostrar lo que se repite, pida a los estudiantes que cambien el patrón a una proporción diferente (por ejemplo, tres estrellas azules por un cuadrado rojo), o pida a los estudiantes que extiendan el patrón. patrón.45

Posibles obstáculos y soluciones

Barricada 1.1. Los estudiantes no pueden dibujar partes del mismo tamaño.

Enfoque sugerido. Hágales saber a los estudiantes que es aceptable dibujar partes que no sean exactamente iguales, siempre y cuando recuerden que las partes deben considerarse iguales.

Barricada 1.2. Los estudiantes no comparten todos los elementos (compartición no exhaustiva) o no crean partes iguales.

Enfoque sugerido. Aunque los niños tienen una comprensión intuitiva de las situaciones de compartir, a veces cometen errores en sus intentos de resolver problemas de compartir.
Los estudiantes no pueden compartir todos los elementos, especialmente si un escenario para compartir requiere dividir un objeto. Los maestros deben ayudar a los estudiantes a comprender que los escenarios de compartir requieren compartir todos los objetos, posiblemente incluso señalando que cada niño quiere recibir todo lo que pueda, por lo que ningún objeto debe quedar sin contabilizar.

Es posible que los estudiantes tampoco creen partes iguales porque no entienden que repartir objetos del mismo tamaño da como resultado una cantidad igual para cada persona.46 En este caso, los profesores pueden discutir cómo repartir objetos garantiza que cada persona reciba una cantidad igual. y puede alentar a los estudiantes a verificar que dividieron los elementos en partes iguales.

Compartir equitativamente es importante porque sienta las bases para la comprensión posterior de fracciones equivalentes y diferencias de magnitud equivalente (por ejemplo, comprender que la diferencia entre 0 y 1/2 es la misma que la diferencia entre 1 y 11/2 o entre 73 y 731/2).

Barricada 1.3. Al crear partes iguales, los estudiantes no distinguen entre el número de cosas compartidas y la cantidad compartida.

Enfoque sugerido. Los estudiantes más jóvenes, en particular, pueden confundir números iguales de partes con cantidades iguales compartidas.47 Por ejemplo, si se les pide a los estudiantes que proporcionen cantidades iguales de comida de un plato con pedazos grandes y pequeños, un niño podría repartir cantidades iguales de pedazos de comida. en lugar de cantidades iguales. Este malentendido puede deberse a una experiencia limitada con situaciones en las que se reparten o comparten entidades de diferentes tamaños.

Una forma de abordar este concepto erróneo es utilizar señales de color para ayudar a los estudiantes a distinguir entre la cantidad que se comparte y la cantidad de artículos que se comparten.48 Por ejemplo, en un escenario en el que se dice que dos perros de juguete idénticos tienen hambre, los niños Se podría preguntar si los perros tendrían la misma cantidad para comer si un perro recibiera cinco trozos grandes rojos de comida simulada y el otro cinco pequeños trozos verdes de comida simulada.

Recomendación 2

Ayude a los estudiantes a reconocer que las fracciones son números y que expanden el sistema numérico más allá de los números enteros. Utilice rectas numéricas como herramienta de representación central para enseñar este y otros conceptos de fracciones desde los primeros grados en adelante.

La enseñanza inicial de fracciones generalmente se centra en la idea de que las fracciones representan partes de un todo (por ejemplo, un tercio como la relación de una parte con un todo que tiene tres partes iguales). Aunque la interpretación parte-todo de las fracciones es importante, con demasiada frecuencia la instrucción no transmite otra idea simple pero fundamental: las fracciones son números con magnitudes (valores) que pueden ordenarse o considerarse equivalentes.

Muchos conceptos erróneos comunes, como que se deben sumar dos fracciones sumando los numeradores y luego sumando los denominadores, surgen de no comprender que las fracciones son números con magnitudes. No comprender esto puede incluso generar confusión sobre si las fracciones son números. Por ejemplo, muchos estudiantes creen que cuatro tercios no es un número y ofrecen explicaciones como: “No se pueden tener cuatro partes de un objeto que se divide en tres partes”. 49 Además, muchos estudiantes no comprenden que las fracciones proporcionan una unidad. de medida que permite una medición más precisa que los números enteros; estos estudiantes no se dan cuenta de que existe una gama infinita de números entre números enteros sucesivos o entre dos fracciones cualesquiera.50 La dependencia exclusiva de la instrucción parte-todo tampoco deja claro cómo se relacionan las fracciones con los números enteros.

Una forma eficaz de desarrollar la comprensión de los estudiantes sobre las fracciones como números con magnitudes es utilizar rectas numéricas. Las rectas numéricas pueden ilustrar claramente la magnitud de las fracciones; la relación entre números enteros y fracciones; y las relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. También proporcionan un punto de partida para desarrollar el sentido numérico de los estudiantes con fracciones y proporcionan una manera de representar visualmente fracciones negativas, lo que de otro modo puede ser una tarea desafiante. Todos estos tipos de comprensión son cruciales para aprender álgebra y otras áreas más avanzadas de las matemáticas.

Resumen de evidencia: evidencia moderada

La evidencia de esta recomendación proviene principalmente de estudios que demuestran la utilidad de las rectas numéricas para desarrollar el sentido numérico con números enteros. Estos estudios utilizaron representaciones de rectas numéricas para enseñar a estudiantes de preescolar y primaria sobre las magnitudes de los números enteros.51 Un estudio adicional mostró cómo las rectas numéricas pueden usarse para enseñar decimales con éxito.52 Todos estos estudios cumplieron con los estándares de evidencia de la WWC. Además, la precisión en la localización de números enteros en las rectas numéricas está relacionada con el rendimiento matemático entre los estudiantes desde jardín de infantes hasta el cuarto grado, y la precisión en la localización de decimales en las rectas numéricas está relacionada con las calificaciones de matemáticas en el aula entre los estudiantes de quinto y sexto grado.53 El panel cree que dada la aplicabilidad de las rectas numéricas a fracciones y números enteros, estos hallazgos indican que las rectas numéricas pueden mejorar el aprendizaje de fracciones en la escuela primaria y secundaria.

Rectas numéricas con números enteros. Jugar un juego de mesa lineal con números enteros durante aproximadamente una hora (cuatro sesiones de 15 minutos durante un período de dos semanas) mejoró la comprensión de las magnitudes numéricas por parte de los niños en edad preescolar de entornos de bajos ingresos.54 El juego implicaba mover un marcador uno o dos espacios a la vez. un tiempo a través de un tablero horizontal que tenía los números del 1 al 10 enumerados en orden de izquierda a derecha en cuadrados consecutivos. Dos estudios adicionales mostraron el valor de otros procedimientos de recta numérica para mejorar el conocimiento de las magnitudes de números enteros. Estimar la ubicación de 10 números en una recta numérica del 0 a 100 mejoró la capacidad de los estudiantes de primer grado para ubicar números enteros en la recta numérica;55 y mostrar estudiantes los sumandos y sumas de problemas de suma en una recta numérica aumentaron la probabilidad de que los estudiantes respondieran correctamente los problemas más adelante.

Rectas numéricas con decimales. En otro estudio, se utilizaron rectas numéricas para enseñar conceptos decimales a estudiantes de quinto y sexto grado.56 La técnica de enseñanza implicó proporcionar a los estudiantes práctica para ubicar decimales en una recta numérica dividida en décimas y con un mensaje para notar el dígito de las décimas para cada número. Posteriormente, estos estudiantes fueron más precisos al ubicar decimales en una recta numérica que los estudiantes cuyas rectas numéricas no estaban divididas en décimas y no recibieron indicaciones. Para todos los estudiantes en el estudio, una comparación de antes y después mostró que la comprensión conceptual de las fracciones mejoró después de ubicar decimales en una recta numérica. Este último hallazgo es una prueba sugestiva, porque no existe ningún grupo de comparación de estudiantes que no hayan utilizado una recta numérica.

Otro estudio examinó un plan de estudios holandés que utilizaba rectas numéricas y contextos de medición para enseñar fracciones.57 Los estudiantes del grupo de tratamiento localizaron y compararon fracciones en una recta numérica y midieron objetos en el aula usando una tira que podía doblarse para medir. partes fraccionarias. Aunque este estudio no cumplió con los estándares de evidencia de la WWC, los autores informaron efectos positivos en el sentido numérico de los estudiantes de secundaria con fracciones.58 Dos estudios adicionales que no fueron elegibles para revisión encontraron resultados mixtos al usar una recta numérica para enseñar conceptos de fracciones. Ambos estudios señalaron los desafíos que enfrentan los estudiantes para comprender fracciones en rectas numéricas.59 Por ejemplo, un estudio informó que los estudiantes tenían dificultades para encontrar fracciones equivalentes en una recta numérica dividida en unidades más pequeñas (por ejemplo, encontrar 1/3 en una recta numérica dividida en sextos).60

Otra evidencia que es consistente con la recomendación incluye un estudio que muestra la relación entre la habilidad para estimar ubicaciones de decimales en una recta numérica y calificaciones de matemáticas para estudiantes de quinto y sexto grado,61 y un análisis de un matemático que indica que aprender a representar el rango completo de números en rectas numéricas es fundamental para comprender los números.62

Cómo llevar a cabo la recomendación

1. Utilice actividades de medición y rectas numéricas para ayudar a los estudiantes a comprender que las fracciones son números, con todas las propiedades que comparten los números.

Cuando los estudiantes ven las fracciones como números, comprenden que las fracciones, al igual que los números enteros, se pueden usar para medir cantidades. Las actividades de medición proporcionan un contexto natural a este respecto.63 A través de tales actividades, los profesores pueden desarrollar la idea de que las fracciones permiten una medición más precisa de cantidades que los números enteros.

Los profesores pueden presentar situaciones en las que se utilizan fracciones para resolver problemas que no se pueden resolver con números enteros. Por ejemplo, pueden preguntar a los estudiantes cómo describir la cantidad de azúcar en una receta de galletas que necesita más de 1 taza pero menos de 2 tazas.

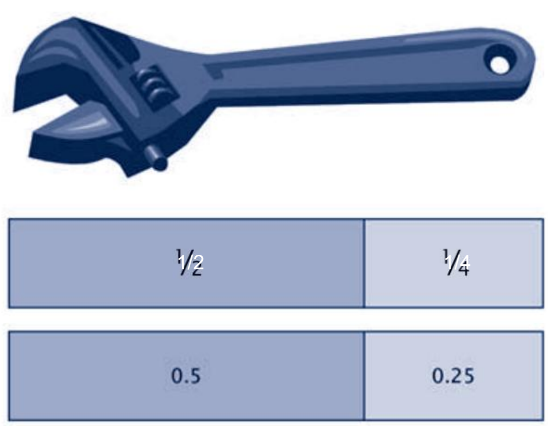
Luego, los maestros pueden mostrar a los estudiantes las distintas líneas de medición en una taza medidora y transmitirles la importancia de las fracciones al describir cantidades. Los profesores deben enfatizar que las fracciones proporcionan una unidad de medida más precisa que los números enteros y permiten a los estudiantes describir cantidades que los números enteros no pueden representar. Las tiras de fracciones (también conocidas como dibujos de tiras de fracciones, diagramas de tiras, diagramas de tiras de barras y diagramas de cintas) son modelos de longitud que permiten a los estudiantes medir objetos usando partes fraccionarias y refuerzan la idea de que las fracciones se pueden usar para representar cantidades (ver Ejemplo 1).

Ejemplo 1. Actividades de medición con tiras de fracciones

Los maestros pueden usar tiras de fracciones como base para actividades de medición para reforzar el concepto de que las fracciones son números que representan cantidades.64

Para comenzar, los estudiantes pueden tomar una tira de cartulina o cartulina que represente la unidad de medida inicial (es decir, un todo) y usar esa tira para medir objetos en el aula (escritorio, pizarra, libro, etc.). Cuando la longitud de un objeto no es igual a un número entero de tiras, los profesores pueden proporcionar a los estudiantes tiras que representen cantidades fraccionarias de la tira original. Por ejemplo, un estudiante podría usar tres tiras enteras y media tira para medir un escritorio.

Usar tiras de fracciones para medir un objeto



Los maestros deben enfatizar que las tiras de fracciones representan diferentes unidades de medida y deben hacer que los estudiantes midan el mismo objeto primero usando solo tiras enteras y luego usando una tira fraccionaria. Los profesores deben discutir cómo la longitud del objeto sigue siendo la misma pero cómo las diferentes unidades de medida permiten una mayor precisión al describirlo. Los estudiantes deben darse cuenta de que el tamaño de las tiras fraccionarias presentadas posteriormente está definido por el tamaño de la tira original (es decir, media tira es igual a la mitad de la longitud de la tira original).

2. Brinde oportunidades para que los estudiantes ubiquen y comparen fracciones en rectas numéricas.

Los maestros deben brindar oportunidades para que los estudiantes ubiquen y comparen fracciones en rectas numéricas. Estas actividades deben incluir fracciones en una variedad de formas, incluidas fracciones propias (2/3), fracciones impropias (5/3), números mixtos (12/3), números enteros (4/2), decimales (0,40) y porcentajes (70%).

Inicialmente, los maestros pueden pedir a los estudiantes que ubiquen y comparen fracciones en rectas numéricas con las fracciones ya marcadas (por ejemplo, una recta numérica con marcas que indican décimas). Las rectas numéricas presegmentadas evitan la dificultad que tienen los estudiantes al dividir con precisión la recta numérica. Estas rectas numéricas también son útiles para ubicar y comparar fracciones cuyas ubicaciones están indicadas (por ejemplo, 3/8 y 5/8 en una recta numérica con octavos marcados) y fracciones cuyo denominador es un factor de las fracciones unitarias que se muestran en la recta numérica (ej., 1/4 y 3/4 en una línea con octavos marcados), así como fracciones con otros denominadores

(por ejemplo, 1/7, 3/5). Por ejemplo, los estudiantes podrían comparar las ubicaciones de 7/8 y 3/4 en una recta numérica marcada con octavos. Estas actividades deben incluir oportunidades para que los estudiantes ubiquen números enteros en la recta numérica y comparen sus ubicaciones con las de fracciones, incluidas aquellas equivalentes a números enteros (por ejemplo, ubicar 1 y 8/8).

Las rectas numéricas también se pueden usar para comparar fracciones de diferentes tamaños con números enteros mayores que uno (ubicando 10/3 en una recta numérica con 0 en el extremo izquierdo, 5 en el extremo derecho y 1, 2, 3 y 4 marcados). entre). El ejemplo 2 proporciona una estrategia que se puede utilizar para presentar a los estudiantes la idea de ubicar fracciones en una recta numérica.

Comparar fracciones con diferentes denominadores en una recta numérica previamente segmentada puede resultar complicado para los estudiantes jóvenes; por ejemplo, comparar 3/8 y 1/3 en una recta numérica dividida en octavos. Para ayudar a los estudiantes a comprender estos problemas, los maestros pueden etiquetar las rectas numéricas con una secuencia de unidades fraccionarias encima de la recta numérica y una secuencia de unidades fraccionarias diferente.

Ejemplo 2. Introducir fracciones en una recta numérica

Introducir la ejemplo describe fracciones en una recta numérica, enfatizando que las fracciones son números con cantidades.

Para ilustrar, el maestro podría primero marcar una recta numérica, etiquetar el 0 y el 1 y luego dividir el espacio entre 0 y 1 en cinco partes de igual tamaño. Después de esto, el maestro podría agregar las etiquetas 0/5, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 y 5/5 en la parte de la recta numérica y resaltar la ubicación de 3/5.[65] Mostrar cómo fracciones (p. ej., 5/5) permite a los maestros discutir qué significan estos términos de fracción y aclarar que los números enteros también son fracciones.

debajo de la recta numérica. Por ejemplo, cuando les piden a los estudiantes que comparen 1/3 y 3/8, los maestros pueden etiquetar los octavos por encima de la recta numérica y los tercios por debajo de ella. Estas rectas numéricas permiten a los estudiantes que se encuentran relativamente temprano en el proceso de aprender sobre fracciones localizar y comparar fracciones con diferentes denominadores y pensar en el tamaño relativo de las fracciones.[66]

Los maestros también deben brindar a los estudiantes oportunidades para ubicar y comparar fracciones en rectas numéricas que estén mínimamente etiquetadas, por ejemplo, aquellas con las etiquetas 0, 1/2, 1, 11/2 y 2. Este enfoque es casi una necesidad. para fracciones con denominadores grandes (por ejemplo, dividir una recta numérica en 28 es difícil) y alienta a los estudiantes a pensar en la ubicación de las fracciones en relación con los puntos de referencia etiquetados.[67] Por ejemplo, los maestros pueden hacer que los estudiantes ubiquen 6/7 en un número línea marcada con 0, 1/2 y 1.

Para una actividad para toda la clase, los maestros pueden dibujar una recta numérica en la pizarra y hacer que los estudiantes marquen estimaciones de dónde se encuentran las diferentes fracciones.

caer. A medida que la recta numérica se llena, los maestros pueden guiar una discusión sobre las fracciones que aún no se han colocado, destacando la necesidad de preservar el orden correcto. Insertar decimales y porcentajes en esa misma recta numérica puede enseñar lecciones valiosas adicionales.

Finalmente, los profesores deben animar a los estudiantes a pensar en la distancia entre dos fracciones: Por ejemplo, los estudiantes podrían comparar 1/12 y 1/4 y considerar si 1/12 está más cerca de 1/4 o 0. De manera similar, 0,3 o 0,45 podrían compararse con ubicaciones marcadas como 0, 1/2 y 1, o 0. , 0,5 y 1.

3. Utilice rectas numéricas para mejorar la comprensión de los estudiantes sobre la equivalencia de fracciones, densidad de unión (el concepto de que hay un número infinito de fracciones entre dos fracciones cualesquiera) y fracciones negativas.

Además de ser útiles para comparar magnitudes de fracciones positivas, las rectas numéricas también pueden ser valiosas para enseñar fracciones equivalentes, fracciones negativas y densidad de fracciones. Por supuesto, las rectas numéricas no son la única forma de enseñar estos conceptos, pero el panel cree que son útiles para mejorar la comprensión de los estudiantes.

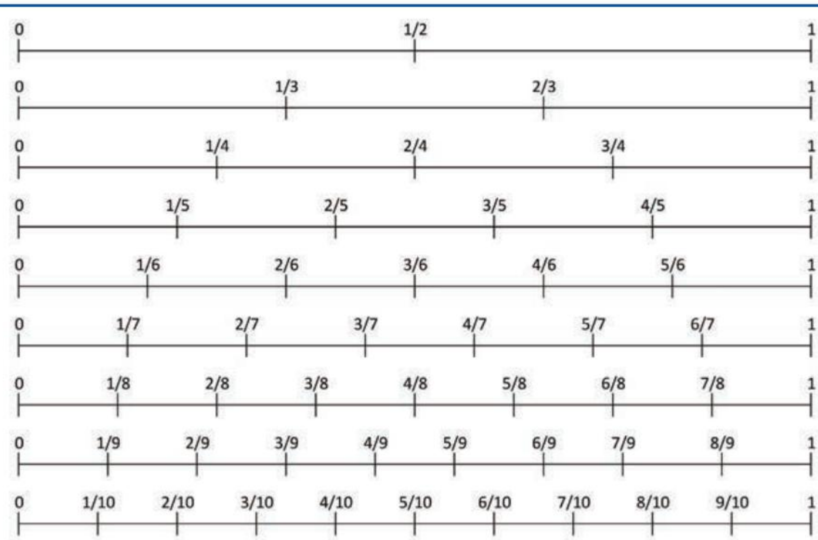
Se pueden utilizar rectas numéricas para ilustrar que fracciones equivalentes describen la misma magnitud. Por ejemplo, pedirles a los estudiantes que ubiquen 2/5 y 4/10 en una sola recta numérica puede ayudarlos a comprender la equivalencia de estos números. Los profesores pueden marcar quintas encima de la línea y décimas debajo (o viceversa) para ayudar a los estudiantes con esta tarea. Aunque ver fracciones equivalentes como el mismo punto en una recta numérica puede ser un desafío para los estudiantes,[68] el panel cree que la capacidad de hacerlo es fundamental para una comprensión profunda de las fracciones.

Una discusión sobre fracciones equivalentes debe basarse en los puntos planteados en el Paso 1 sobre las fracciones en la recta numérica. Por ejemplo, los profesores pueden dividir una recta numérica de 0 a 1 en mitades y cuartos y mostrar que 1/2 y 2/4 ocupan el mismo punto, o equivalente, en la recta numérica (ver Figura 4). Los estudiantes pueden usar una regla para identificar fracciones equivalentes en las rectas numéricas apiladas que se muestran en la Figura 4, identificando fracciones que ocupan la misma ubicación en cada recta numérica. Las tiras de fracciones también se pueden utilizar para reforzar el concepto de fracciones equivalentes al permitir a los estudiantes medir la distancia entre dos puntos usando tiras de fracciones de diferentes tamaños (consulte la Figura 5).

Las rectas numéricas también se pueden utilizar para ayudar a los estudiantes a comprender que existe un número infinito de fracciones entre otras dos fracciones cualesquiera. Esta es una forma en la que se diferencian las fracciones.

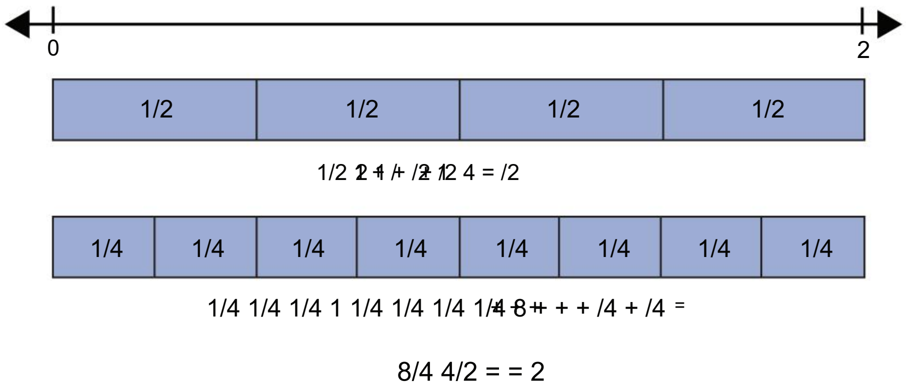
Figura 4. Encontrar fracciones equivalentes en una recta numérica

Uso de rectas numéricas para enseñar equivalencia de fracciones en un plan de estudios japonés



Fuente: Adaptado de Shoseki (2010).

Figura 5. Uso de tiras de fracciones para demostrar fracciones equivalentes



de números enteros y puede ser un concepto difícil de comprender para los estudiantes.69 Los maestros pueden ayudar a los estudiantes a comprender este concepto pidiéndoles que hagan particiones sucesivas en la recta numérica, creando fracciones unitarias cada vez más pequeñas.70 Por ejemplo, los estudiantes pueden dividir números enteros segmentos por la mitad para crear mitades, y luego divida cada mitad en mitades para crear cuartos, luego divida cada cuarto en mitades para crear octavos, y así sucesivamente (esta actividad también se puede hacer con tercios, novenos, veintisiete, etc.) . Tales divisiones muestran a los estudiantes que siempre pueden dividir una recta numérica usando fracciones unitarias más pequeñas.71 Lo mismo se puede hacer con decimales y porcentajes, por ejemplo, mostrando que 0,13, 0,15 y 0,17 se encuentran entre los infinitos números que se encuentran entre 0,1 y 0,2. , y ese 2% se sitúa entre el 0% y el 10%.

El panel recomienda además que los profesores utilicen rectas numéricas al introducir fracciones negativas. Enseñar fracciones negativas en un contexto de parte y todo puede resultar difícil, porque la idea de una parte negativa de un todo no es intuitiva. Pero la recta numérica proporciona una representación visual sencilla de fracciones menores que cero, así como de fracciones mayores que cero.

Al proporcionar rectas numéricas que incluyen marcas y etiquetas para el cero, para varias fracciones positivas y para varias fracciones negativas con los mismos valores absolutos que las fracciones positivas, los maestros pueden ayudar a transmitir la simetría alrededor del cero de las fracciones positivas y negativas. Y al colocar fracciones positivas y negativas en historias (posiblemente sobre lugares por encima y por debajo del nivel del mar o sobre dinero ganado o perdido), los profesores pueden ilustrar la suma y la resta de ambos tipos de fracciones.

4. Ayude a los estudiantes a comprender que las fracciones se pueden representar como fracciones, decimales y porcentajes comunes, y desarrolle la capacidad de los estudiantes para traducir entre estas formas.

Los estudiantes necesitan una visión amplia de las fracciones como números. Eso incluye comprender que las fracciones se pueden representar como decimales y porcentajes, así como también como fracciones comunes. Los profesores deben transmitir claramente que las fracciones, decimales y porcentajes comunes son simplemente formas diferentes de representar el mismo número.

Las rectas numéricas proporcionan una herramienta útil para ayudar a los estudiantes a comprender que las fracciones, los decimales y los porcentajes son formas diferentes de describir el mismo número. Usando una recta numérica con fracciones comunes enumeradas encima y decimales o porcentajes debajo, los maestros pueden ayudar a los estudiantes a ubicar y comparar fracciones, decimales y porcentajes en la misma recta numérica. Por ejemplo, los profesores pueden proporcionar a los estudiantes una recta numérica marcada con 0 y 1, y se les puede pedir que ubiquen 3/4, 0,75 y 75% en ella. Además, cuando los estudiantes usan la división para convertir una fracción a decimal, pueden trazar tanto la fracción como el decimal en la misma recta numérica.

Posibles obstáculos y soluciones

Barricada 2.1. Los estudiantes intentan dividir la recta numérica en cuartos dibujando cuatro marcas de almohadilla en lugar de tres, o tratan la recta numérica entera como la unidad.72

Enfoque sugerido. Cuando se utiliza una recta numérica con fracciones, se debe enseñar a los estudiantes a representar cuartos como cuatro segmentos del mismo tamaño entre dos números enteros. Los profesores deben demostrar que insertar tres marcas equiespaciadas entre, digamos, 0 y 1 divide el espacio en cuatro segmentos iguales, o cuartos. Esta regla se puede generalizar para que los estudiantes sepan que dividir la recta numérica en 1/n unidades requiere dibujar n – 1 marcas entre dos números enteros.

Barricada 2.2. Cuando los estudiantes localizan fracciones en la recta numérica, tratan los números de la fracción como números enteros (por ejemplo, colocando 3/4 entre 3 y 4).

Enfoque sugerido. Este error refleja una idea errónea común en la que los estudiantes aplican su conocimiento de números enteros a fracciones, viendo los números que componen una fracción como números enteros separados.
Esta idea errónea se puede abordar presentando a los estudiantes casos contrastantes: por ejemplo, pidiéndoles que ubiquen 3 y 4 en una recta numérica del 0 al 4, luego identifiquen 3/4 como una fracción entre 0 y 1, y finalmente discutan por qué. cada fracción va donde está colocada.

Barricada 2.3. Los estudiantes tienen dificultades para entender que dos fracciones equivalentes son el mismo punto en una recta numérica.

Enfoque sugerido. Los estudiantes a menudo tienen problemas para internalizar cómo las particiones que ubican una fracción (por ejemplo, particiones de octavos para ubicar 4/8) también pueden ayudar a ubicar un equivalente fracción (por ejemplo, 1/2). Una forma de abordar esta falta de comprensión es mostrar a los estudiantes un conjunto de etiquetas numéricas encima de la recta numérica y otro conjunto de etiquetas debajo de ella. Así, se podrían marcar las mitades justo encima de la línea y los octavos justo debajo, y los profesores podrían señalar las posiciones equivalentes de 1/2 y 4/8, de 1 y 8/8, de 11/2 y 12/8, y pronto. Otro enfoque es que los estudiantes creen una recta numérica que muestre 1/2 y otra recta numérica que muestre 4/8 y luego las comparen.
Los profesores pueden alinear las dos rectas numéricas y dirigir una discusión sobre fracciones equivalentes.

Barricada 2.4. Los materiales curriculares utilizados por mi distrito escolar se centran en representaciones de parte y todo y no utilizan la recta numérica como herramienta de representación clave para conceptos y operaciones de fracciones.

Enfoque sugerido. Aunque es importante que los estudiantes comprendan que las fracciones representan partes de un todo, el panel señala que este es solo un uso de las fracciones y, por lo tanto, recomienda el uso de rectas numéricas y contextos de medición para desarrollar una comprensión integral de las fracciones.

Los manipulativos que a menudo se utilizan para representar interpretaciones de parte y todo, como círculos de fracciones y tiras de fracciones, también se pueden usar para transmitir interpretaciones de medidas, pero se debe tener mucho cuidado para evitar que los estudiantes simplemente cuenten partes de la tira de fracción o del círculo que corresponden. al numerador y al denominador sin entender cómo el numerador y el denominador juntos indican una sola cantidad. El uso de rectas numéricas que no están marcadas entre los puntos finales puede evitar dicho conteo sin comprensión. Algunos libros de texto utilizan ampliamente las rectas numéricas para enseñar fracciones; Los maestros deben examinar esos libros en busca de ideas sobre cómo usar rectas numéricas para transmitir la idea de que las fracciones son medidas de cantidades.

Recomendación 3

Ayude a los estudiantes a comprender por qué tienen sentido los procedimientos para cálculos con fracciones.

Los estudiantes son más competentes en la aplicación de procedimientos computacionales cuando comprenden por qué esos procedimientos tienen sentido. Aunque la comprensión conceptual es fundamental para el uso correcto de los procedimientos, a los estudiantes a menudo se les enseñan procedimientos computacionales con fracciones sin una explicación adecuada de cómo o por qué funcionan los procedimientos.

Los profesores deben tomarse el tiempo para dar tales explicaciones y enfatizar cómo los procedimientos de cálculo de fracciones transforman las fracciones de manera significativa. En otras palabras, deberían centrarse tanto en la comprensión conceptual como en la fluidez procedimental y deberían enfatizar las conexiones entre ellas. El panel recomienda varias prácticas para desarrollar la comprensión de los procedimientos computacionales, incluido el uso de representaciones visuales y estimaciones para reforzar la comprensión conceptual. Abordar las ideas erróneas de los estudiantes y plantear problemas en contextos del mundo real también puede contribuir a una mejor comprensión.

Resumen de evidencia: evidencia moderada

El panel basó esta recomendación en gran parte en tres estudios bien diseñados que demostraron la eficacia de enseñar comprensión conceptual al desarrollar la habilidad computacional de los estudiantes con fracciones.73 Estos estudios se centraron en decimales y fueron de escala relativamente pequeña; sin embargo, el panel cree que sus resultados, junto con evidencia extensa que muestra que la información se recuerda mucho mejor que la información sin significado, proporcionan evidencia convincente para esta recomendación.74 El apoyo adicional a la recomendación proviene de cuatro estudios que mostraron una relación positiva entre el conocimiento conceptual y computacional de las fracciones.75

Los estudios que contribuyeron a la base de evidencia para esta recomendación utilizaron intervenciones informáticas para examinar el vínculo.

entre el conocimiento conceptual y la habilidad computacional con decimales. Los estudiantes de sexto grado completaron tres lecciones sobre valor posicional decimal (es decir, conocimiento conceptual) y tres lecciones sobre suma y resta de decimales (es decir, conocimiento procedimental).[76] La iteración entre los dos tipos de lecciones mejoró el conocimiento procedimental de los estudiantes, en comparación con la enseñanza. -ando todas las lecciones conceptuales antes que cualquiera de las procedimentales. En otro estudio, estudiantes de quinto y sexto grado practicaron la localización de decimales en una recta numérica usando un juego de computadora. Dividir la recta numérica en décimas y alentar a los estudiantes a notar el dígito de las décimas mejoró la capacidad de los estudiantes de quinto y sexto grado para ubicar decimales en una recta numérica (en comparación con no proporcionar las indicaciones).[77]

La investigación también muestra una relación positiva entre el conocimiento conceptual y procedimental de las fracciones de los estudiantes. Es decir, los niños que tienen un conocimiento conceptual superior al promedio también tienden a tener un conocimiento superior al promedio de los procedimientos computacionales. Estudios de estudiantes de 4.° y 5.° grado y de estudiantes de 7.° y 8.° grado indicaron que el conocimiento conceptual estaba positivamente relacionado con la competencia computacional después de controlar el rendimiento previo en matemáticas, la fluidez aritmética, la memoria de trabajo y la capacidad de lectura.[78] Además , el conocimiento conceptual de los decimales predijo la capacidad de los estudiantes para ubicar decimales en una recta numérica.[79] Si bien estos estudios muestran una correlación entre el conocimiento conceptual y el procedimental, no examinaron la efectividad de las intervenciones que desarrollan el conocimiento conceptual para mejorar el conocimiento procedimental.

El panel también identificó evidencia que abordaba específicamente dos de los cuatro pasos para implementar esta recomendación.

Uso de representaciones. La evidencia identificada por el panel respalda la recomendación.

Práctica del uso de representaciones visuales y objetos manipulables durante la instrucción sobre el cálculo de fracciones (Paso 1). Dos estudios bien diseñados encontraron que el uso de objetos manipulables y representaciones pictóricas tenía un efecto positivo en la habilidad computacional con fracciones.[80] Uno de estos estudios se centró en círculos fraccionarios (conjuntos de círculos, en los que el primero es un círculo completo, el el segundo se divide por la mitad, el tercero se divide en tercios, etc.).[81] El otro estudio hizo que los estudiantes usaran una variedad de manipulativos para aprender procedimientos computacionales con fracciones, incluidos cuadrados de fracciones y tiras de fracciones.[82] Un tercer estudio examinó la Plan de estudios del Proyecto de Números Racionales, que enfatiza el uso de objetos manipulables como uno de muchos componentes.[83] Los autores del estudio informaron que el plan de estudios tuvo un efecto positivo en las habilidades de cálculo de fracciones. Sin embargo, los materiales manipulables eran sólo un componente de este plan de estudios multifacético y el estudio proporcionó información insuficiente para que la WWC completara una revisión, por lo que las conclusiones que se pueden extraer del estudio sobre el papel de los materiales manipulables son limitadas.

Contextos del mundo real. El panel identificó evidencia relacionada con el uso de contextos del mundo real para mejorar la habilidad en la ejecución de procedimientos computacionales con fracciones (Paso 4).[84] En uno de los estudios, la personalización de problemas para estudiantes de quinto y sexto grado mejoró sus habilidades. capacidad para resolver problemas de división con fracciones.[85] El otro estudio encontró que plantear problemas en contextos cotidianos mejoró la capacidad de los estudiantes de 11 y 12 años para ordenar y comparar decimales.[86] Estudios adicionales abogaron por el uso de herramientas del mundo real. contextos para enseñar procedimientos de cálculo con fracciones, pero no proporcionó evidencia rigurosa de que dicha instrucción cause mejoras en el cálculo de fracciones.[87]

Cómo llevar a cabo la recomendación

1. Utilice modelos de área, rectas numéricas y otras representaciones visuales para mejorar la comprensión de los estudiantes sobre los procedimientos computacionales formales.

Los profesores deben utilizar representaciones visuales y manipulativos, incluidas rectas numéricas y modelos de áreas, que ayuden a los estudiantes a comprender los conceptos básicos que subyacen a los procedimientos computacionales y las razones por las que estos procedimientos funcionan. Por ejemplo, cuando enseñan suma o resta de fracciones con denominadores diferentes, los profesores deben utilizar una representación que ayude a los estudiantes a ver la necesidad de denominadores comunes.

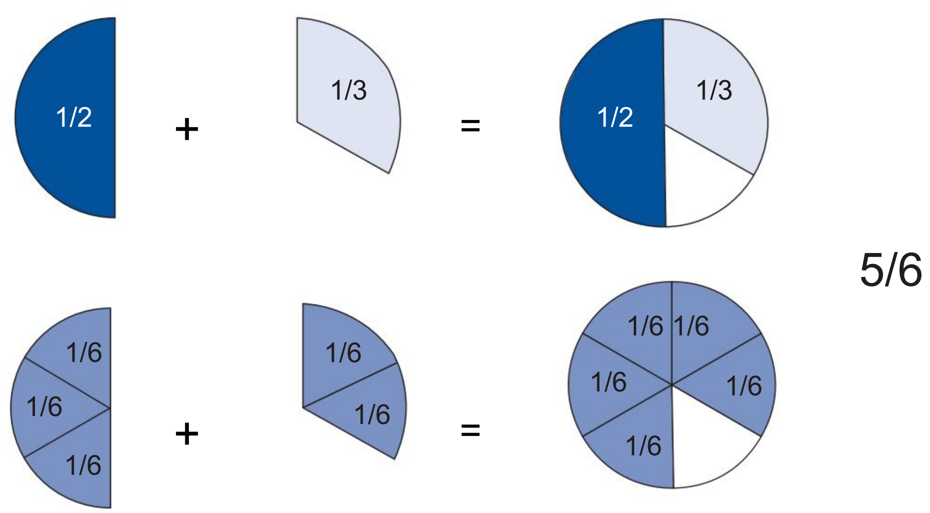
Hay varias formas en que los profesores pueden utilizar las representaciones para iluminar conceptos clave subyacentes:

- Encuentra un denominador común cuando Sumar y restar fracciones. Un error común que cometen los estudiantes cuando se enfrentan a fracciones que tienen denominadores diferentes es sumar tanto numeradores como denominadores.88 Ciertas representaciones pueden proporcionar pistas visuales para ayudar a los estudiantes a ver la necesidad de contar con fracciones comunes. denominadores. Por ejemplo, los maestros pueden demostrar que al sumar piezas correspondientes a fracciones de objetos (por ejemplo, sumar 1/2 de un círculo y 1/3 de un círculo), convertir 1/2 y 1/3 a sextos proporciona una solución común. denominador que se aplica a ambas fracciones y permite su suma (Figura 6). Analice con los estudiantes por qué multiplicar denominadores siempre indica un denominador común que se puede usar para expresar ambas fracciones originales.

- Redefinir la unidad al multiplicar fracciones. Multiplicar dos fracciones requiere encontrar una fracción de una fracción. Por ejemplo, al multiplicar 1/4 por 2/3, los estudiantes podrían comenzar con 2/3 de la unidad original (generalmente no mencionada) y encontrar 1/4 de esta cantidad fraccionaria. Las representaciones pictóricas o concretas pueden ayudar a los estudiantes a visualizar este proceso para mejorar su comprensión del procedimiento de multiplicación. Por ejemplo, los estudiantes pueden sombrear con

Figura 6. Círculos de fracciones para suma y resta

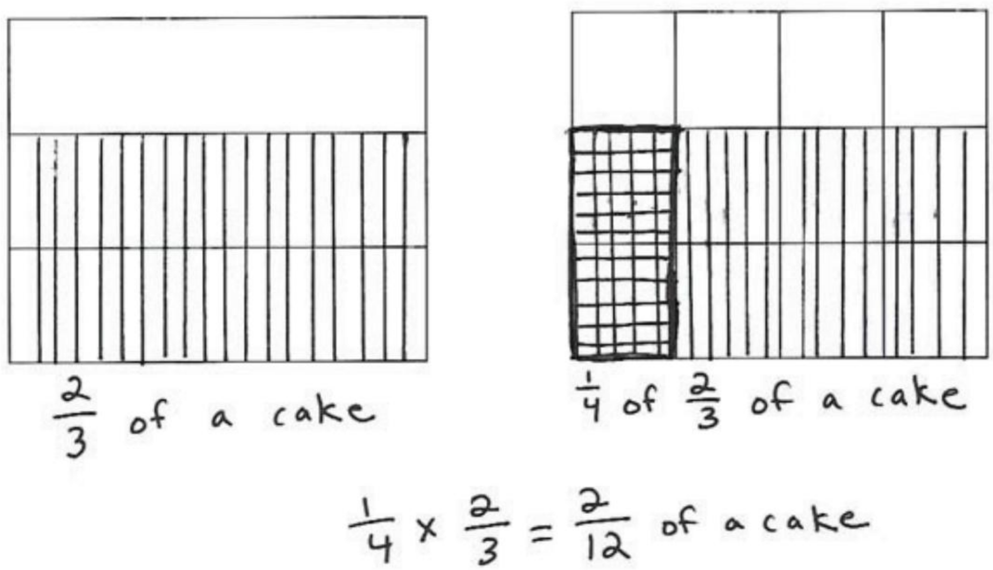
Sumar 1/2 + 1/3 usando círculos fraccionarios



Fuente: Adaptado de Cramer y Wyberg (2009).

Figura 7. Redefiniendo la unidad al multiplicar fracciones

Lori está glaseando un pastel. Sabe que 1 taza de glaseado cubrirá 2/3 de un pastel. ¿Cuánto pastel puede cubrir con 1/4 taza de glaseado?



líneas verticales de 2/3 de un pastel cuadrado dibujadas en papel y luego sombreadas con líneas horizontales de 1/4 del área sombreada del pastel, lo que da como resultado un producto representado por el área rayada (Figura 7).89 Este enfoque ilustra cómo redefinir la unidad: inicialmente tratando el pastel completo como un todo y luego tratando la porción sombreada verticalmente del pastel como un todo.

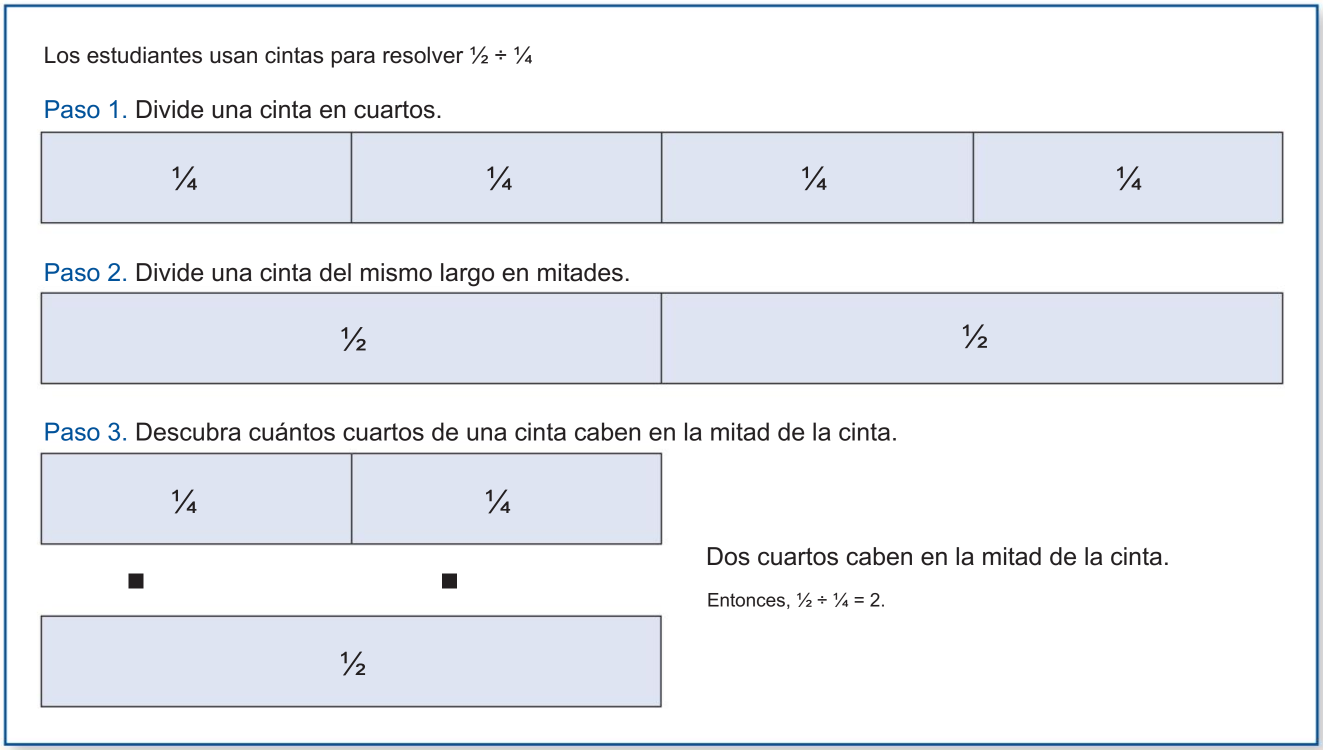
• Dividir un número en partes fraccionarias. Dividir fracciones es conceptualmente similar a dividir números enteros, en el sentido de que los estudiantes pueden pensar en cuántas veces el divisor entra en el dividendo. Por ejemplo, 1/2 ÷ 1/4 se puede representar en términos de "¿Cuántos 1/4 hay en 1/2?"

Los maestros pueden usar representaciones como cintas o una recta numérica para ayudar a los estudiantes a modelar el proceso de división de fracciones. Los estudiantes que usan cintas pueden cortar dos cintas del mismo tamaño y luego separar una en cuartos y la otra en mitades. Para mostrar el problema de división 1/2 ÷ 1/4, los estudiantes pueden averiguar cuántos cuartos de una cinta caben en la mitad de una cinta, cuando toda la cinta tenía la misma longitud en ambos casos (ver Figura 8).90 De manera similar, un maestro puede dibujar una recta numérica con cuartos y mitades etiquetados para mostrar a los estudiantes que hay son dos segmentos de 1/4 en 1/2. Los profesores pueden ayudar a los estudiantes a profundizar su comprensión del proceso de división presentándoles problemas en los que el divisor, el dividendo o ambos son mayores que uno, y problemas en los que el cociente no es un número entero, como 13/4. dividido por 1/2.

Los profesores deben considerar las ventajas y desventajas de diferentes representaciones para enseñar procedimientos de cálculo con fracciones. Una cuestión clave es si la representación refleja adecuadamente el proceso de cálculo que se enseña, permitiendo a los estudiantes establecer vínculos entre ambos.

Los profesores también deberían pensar si una representación se puede utilizar con diferentes tipos de fracciones: fracciones propias (5/8),

Figura 8. Uso de cintas para modelar la división con fracciones



números mixtos (13/8), fracciones impropias (11/8) y números negativos (–1/2). Por ejemplo, los modelos de área pueden ilustrar fácilmente la suma de fracciones con números positivos, pero no se prestan tan fácilmente para explicar la suma de fracciones con números negativos.

Por el contrario, las rectas numéricas se pueden utilizar para explicar ambos.

Representaciones que los estudiantes han utilizado para aprender otros conceptos matemáticos, especialmente

Otros conceptos de fracciones pueden resultar particularmente útiles. Por ejemplo, muchos estudiantes aprenden a representar decimales usando bloques de base 10 o cuadrículas de 100 (cuadrados de 10 por 10, donde cada cuadrado representa 1/100 y el cuadrado completo representa 1). La familiaridad con esta representación también podría ayudar a los estudiantes a comprender la suma y resta de fracciones decimales y comunes. Por ejemplo, se pueden usar 100 cuadrículas para ilustrar que sumar 2,34 + 1,69 es lo mismo que sumar 234/100 + 169/100.

2. Brinde oportunidades para que los estudiantes utilicen la estimación para predecir o juzgar la razonabilidad de las respuestas a problemas que involucran cálculo con fracciones.

Al enseñar procedimientos para calcular fracciones, los profesores deben brindar oportunidades a los estudiantes para estimar las soluciones de los problemas. La estimación requiere que los estudiantes utilicen habilidades de razonamiento y, por lo tanto, los lleva a centrarse en el significado de los procedimientos para calcular con fracciones.91 Los profesores pueden pedir a los estudiantes que proporcionen una estimación inicial y expliquen su pensamiento antes.

pidiéndoles que calculen la respuesta.92 Los estudiantes, a su vez, pueden utilizar las estimaciones para juzgar si sus respuestas son razonables.

Para mejorar las habilidades de estimación, los profesores pueden discutir si las soluciones de los estudiantes a problemas específicos son razonables y por qué; También pueden pedir a los estudiantes que expliquen las estrategias que utilizaron para llegar a sus estimaciones y comparar sus estimaciones iniciales con las soluciones que alcanzaron aplicando un algoritmo computacional. Considere un ejemplo: un estudiante podría estimar que la solución de 1/2 + 1/5 es mayor que 1/2 pero menor que 3/4, ya que 1/5 es menor que 1/4. Si luego el estudiante suma incorrectamente los numeradores y denominadores para producir la suma 2/7, el maestro puede notar que esta respuesta no puede ser correcta porque 2/7 es menor que 1/2. 93 A partir de ahí, el profesor puede guiar al estudiante para identificar, comprender y corregir el error de procedimiento.

Es probable que la estimación sea más útil en problemas en los que no se puede calcular una solución rápida o fácilmente. No tiene sentido pedir a los estudiantes que estimen la respuesta a un problema que puede resolverse con rapidez y precisión mediante cálculo mental, como 7/9 – 5/9.

Enseñar a los estudiantes estrategias de estimación efectivas (Ejemplo 3) puede maximizar el valor de la estimación para profundizar la comprensión de los cálculos que involucran fracciones.

Ejemplo 3. Estrategias para estimar con fracciones

El fortalecimiento de las habilidades de estimación puede desarrollar la comprensión de los estudiantes sobre los procedimientos computacionales.

Puntos de referencia. Una forma de estimar es a través de puntos de referencia: números que sirven como puntos de referencia para estimar el valor de una fracción.94 Los números 0, 1/2 y 1 son puntos de referencia útiles porque los estudiantes generalmente se sienten cómodos con ellos. Los estudiantes pueden considerar si una fracción es la más cercana a 0, 1/2 o 1. Por ejemplo, al sumar 7/8 y 3/7, los estudiantes pueden razonar que 7/8 está cerca de 1 y 3/7 está cerca de 1/2, por lo que la respuesta será cercana a 11/2. 95 Además, si dividen 5 entre 5/6, los estudiantes podrían razonar que 5/6 es cercano a 1 y 5 dividido por 1 es 5, por lo que la solución debe ser un poco más que 5,96

Tamaño relativo de fracciones unitarias. Un método útil para realizar estimaciones es que los estudiantes consideren el tamaño de las fracciones unitarias. Para hacer esto, los estudiantes primero deben comprender que el tamaño de una parte fraccionaria disminuye a medida que aumenta el denominador.97 Por ejemplo, para estimar la respuesta a 9/10 + 1/8, se puede alentar a los estudiantes principiantes a razonar que 9/ 10 es casi 1, que 1/8 está cerca de 1/10 y que, por lo tanto, la respuesta será aproximadamente 1. Se puede animar a los estudiantes más avanzados a razonar que 9/10 está a sólo 1/10 de 1, que 1/ 8 es ligeramente mayor que 1/10 y, por lo tanto, la solución será un poco mayor que 1. El principio puede y debe generalizarse más allá de las fracciones unitarias una vez que se entiende en ese contexto. Las dimensiones clave para la generalización incluyen la estimación de resultados de operaciones que involucran fracciones no unitarias (p. ej., 3/4 ÷ 2/3), fracciones impropias (7/3 ÷ 3/4) y decimales (0,8 ÷ 0,33).

Colocación del punto decimal. Un error común al multiplicar decimales, como 0,8 × 0,9 o 2,3 × 8,7, es colocar mal el decimal. Alentar a los estudiantes a estimar la respuesta primero puede reducir dicha confusión. Por ejemplo, darse cuenta de que 0,8 y 0,9 son menores que 1 pero bastante cercanos a él puede ayudar a los estudiantes a darse cuenta de que respuestas como 0,072 y 7,2 deben ser incorrectas.

3. Abordar conceptos erróneos comunes sobre procedimientos computacionales con fracciones.

Los conceptos erróneos sobre las fracciones a menudo interfieren con la comprensión de los procedimientos computacionales. El panel cree que es fundamental identificar a los estudiantes que operan con tales conceptos erróneos, discutirlos con ellos y dejar claro a los estudiantes por qué los conceptos erróneos conducen a respuestas incorrectas y por qué los procedimientos correctos conducen a respuestas correctas.

Los profesores pueden presentar estos conceptos erróneos en discusiones sobre cómo y por qué los procedimientos de cálculo de algunos estudiantes dan respuestas correctas, mientras que los de otros no. El grupo probablemente encontrará que muchos errores computacionales se deben a que los estudiantes aplican mal reglas que son apropiadas con números enteros o con otras operaciones computacionales con fracciones.

A continuación se describen algunos conceptos erróneos comunes, junto con recomendaciones para abordarlos.

• Creer que los numeradores y denominadores de las fracciones pueden tratarse como números enteros separados. Un error común que cometen los estudiantes es sumar o restar los numeradores y denominadores de dos fracciones (por ejemplo, 2/4 + 5/4 = 7/8 o 3/5 – 1/2 = 2/3).98 Estudiantes Quienes se equivocan de esta manera están aplicando mal sus conocimientos de suma y resta de números enteros a problemas de fracciones y no reconocen que los denominadores definen el tamaño de la parte fraccionaria y que los numeradores representan el número de esta parte. El hecho de que este enfoque sea apropiado para la multiplicación de fracciones es otra fuente de apoyo a la idea errónea.

Presentar problemas significativos puede resultar útil para superar esta idea errónea. Por ejemplo, un maestro podría presentar el problema: "Si tienes 3/4 de una naranja y le das 1/3 a un amigo, ¿qué fracción de la naranja original te queda?" Restar los numeradores y denominadores por separado daría como resultado una respuesta de 2/1 o 2. Los estudiantes deben reconocer inmediatamente la imposibilidad de comenzar con 3/4 de una naranja, regalar un poco y terminar con 2 naranjas. Estos ejemplos pueden motivar a los estudiantes a pensar profundamente sobre por qué es inapropiado tratar numeradores y denominadores como números enteros separados y pueden llevarlos a ser más receptivos a las discusiones sobre los procedimientos apropiados.

• No encontrar un denominador común al sumar o restar fracciones con denominadores diferentes. Los estudiantes a menudo no logran convertir fracciones a formas equivalentes con un denominador común antes de sumarlas o restarlas, y en su lugar simplemente insertan el denominador mayor en las fracciones del problema como denominador en la respuesta (por ejemplo, 4/5 + 4/10) . = 8/10).99 Este error ocurre cuando los estudiantes no entienden que diferentes denominadores reflejan fracciones unitarias de diferentes tamaños y que sumar y restar fracciones requiere una fracción unitaria común (es decir, denominador). El mismo concepto erróneo subyacente puede llevar a los estudiantes a cometer el error estrechamente relacionado de cambiar el denominador de una fracción sin realizar el cambio correspondiente en el numerador; por ejemplo, al convertir el problema 2/3 + 2/6 en 2/6 + 2/. 6. Las representaciones visuales que muestran fracciones equivalentes, como una recta numérica o una tira de fracciones, pueden ilustrar nuevamente la necesidad de denominadores comunes y cambios apropiados en los numeradores.

• Creer que sólo es necesario manipular números enteros en los cálculos con fracciones mayores que uno. Al sumar o restar números mixtos, los estudiantes pueden ignorar las partes fraccionarias y trabajar sólo con los números enteros (por ejemplo, 53/5 – 21/7 = 3).100 Estos estudiantes están ignorando la parte del problema que no entienden, malinterpretar el significado de los números mixtos o suponer que tales problemas simplemente no tienen solución.101

Un error relacionado es pensar que los números enteros tienen el mismo denominador que una fracción en el problema.102 Este error podría llevar a los estudiantes a traducir el problema 4 – 3/8 a 4/8 – 3/8 y encontrar una respuesta de 1 / 8. Cuando se les presenta un número mixto, los estudiantes con una idea errónea podrían sumar el número entero al numerador, como en 31/3 × 6/7 = (3/3 + 1/3) × 6/7 = 4/3 × 6 /7 = 24/21. Ayudar a los estudiantes a comprender la relación entre números mixtos y fracciones impropias, y cómo traducirlos entre sí, es crucial para trabajar con fracciones.

• Tratar el denominador del mismo modo en problemas de suma y multiplicación de fracciones. Los estudiantes a menudo dejan el denominador sin cambios en problemas de multiplicación de fracciones que tienen denominadores iguales (por ejemplo, 2/3 × 1/3 = 2/3).103 Esto puede ocurrir porque los estudiantes generalmente encuentran más problemas de suma de fracciones que de multiplicación de fracciones; esto podría llevarlos a generalizar incorrectamente a la multiplicación el procedimiento correcto para tratar con denominadores iguales en problemas de suma. Los maestros pueden abordar este concepto erróneo explicando la base conceptual de la multiplicación de fracciones usando fracciones unitarias (por ejemplo, 1/2 × 1/2 = mitad de la mitad = 1/4). En particular, los profesores pueden demostrar que el problema 1/2 × 1/2 en realidad consiste en preguntar qué es 1/2 de 1/2 , lo que implica que el producto debe ser menor que cualquiera de las fracciones que se multiplican.

- No comprender el procedimiento de inversión y multiplicación para resolver problemas de división de fracciones. Los estudiantes a menudo aplican mal el procedimiento de invertir y multiplicar para dividir por una fracción porque carecen de comprensión conceptual del procedimiento. Un error común es no invertir ninguna de las fracciones; por ejemplo, un estudiante puede resolver el problema 2/3 ÷ 4/5 multiplicando las fracciones sin invertir 4/5 (por ejemplo, escribiendo que 2/3 ÷ 4/5 = 8/15).104 Otras aplicaciones erróneas comunes de la inversión La regla de multiplicar es invertir la fracción incorrecta (p. ej., 2/3 ÷ 4/5 = 3/2 × 4/5) o invertir ambas fracciones (2/3 ÷ 4/5 = 3/2 × 5/ 4). Estos errores generalmente reflejan una falta de comprensión conceptual de por qué el procedimiento de invertir y multiplicar produce el resultado correcto.

cociente. El procedimiento de invertir y multiplicar traduce un cálculo de varios pasos en un procedimiento más eficiente.

El panel sugiere que los profesores ayuden a los estudiantes a comprender el cálculo de varios pasos que es la base del procedimiento de inversión y multiplicación. Los profesores pueden comenzar observando que multiplicar cualquier número por su recíproco produce un producto de 1, y que dividir cualquier número por 1 deja el número sin cambios. Luego, los maestros pueden mostrarles a los estudiantes que multiplicar ambas fracciones por el recíproco del divisor equivale a usar el procedimiento de invertir y multiplicar. Para el problema 2/3 ÷ 4/5 = (tenga en cuenta que nos referimos a 2/3 como dividendo y 4/5 como divisor):

- multiplicar el dividendo (2/3) y el divisor (4/5) por el recíproco del divisor produce (2/3 × 5/4) ÷ (4/5 × 5/4). •multiplicar el divisor

original (4/5) por su recíproco (5/4) produce un divisor de 1, lo que da como resultado 2/3 × 5/4 ÷ 1, lo que produce 2/3 × 5/4.

- así, el procedimiento de invertir y multiplicar, multiplicar 2/3 × 5/4 proporciona la solución.

4. Presentar contextos del mundo real con números plausibles para problemas que involucran poniendo con fracciones.

Presentar problemas con números plausibles ambientados en contextos del mundo real puede despertar las habilidades intuitivas de resolución de problemas de los estudiantes para calcular con fracciones.105 Los contextos deben proporcionar significado a las cantidades fraccionarias involucradas en un problema y al procedimiento computacional utilizado. para solucionarlo. Los contextos de medición del mundo real, como reglas, cintas y cintas métricas, pueden ser útiles, al igual que los alimentos, tanto elementos discretos (p. ej., cartones de huevos, cajas de chocolates) como continuos (p. ej., pizzas, barras de chocolate). 106 Los propios estudiantes pueden ser una fuente útil de ideas para contextos relevantes, permitiendo a los profesores adaptar los problemas en torno a detalles que son familiares y significativos para los estudiantes.107 La escuela

Los eventos, como excursiones o fiestas de clase, días de atletismo y actividades continuas en otras materias, también pueden servir como contextos interesantes para los problemas.

Los profesores pueden ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre un problema del mundo real y la notación fraccionaria utilizada para representarlo. En algunos casos, los estudiantes pueden resolver un problema enmarcado en un contexto cotidiano pero no pueden resolver el mismo problema usando notación formal.108 Por ejemplo, pueden saber que dos mitades equivalen a un entero pero responden al problema escrito 1/2 + 1/ 2 con 2/4. Los profesores deben ayudar a los estudiantes a ver la conexión entre el problema narrativo y la fracción.

notación y anímelos a aplicar su conocimiento intuitivo en ambas situaciones. Al intentar establecer conexiones, los profesores pueden

Dirija a los estudiantes de regreso al problema de la historia del mundo real si sus estudiantes necesitan comprender mejor la notación formal.109

Posibles obstáculos y soluciones

Barricada 3.1. Los estudiantes cometen errores de cálculo (por ejemplo, sumar fracciones sin encontrar un denominador común) cuando usan ciertas representaciones pictóricas y de objetos concretos para resolver problemas que involucran cálculos con fracciones.

Enfoque sugerido. Los profesores deben elegir con cuidado representaciones que se correspondan directamente con el cálculo de fracciones que se enseña. Por ejemplo, cuando se enseña a sumar fracciones, una representación debe demostrar la necesidad de sumar unidades similares y así llevar a los estudiantes a encontrar un denominador común. De hecho, el uso de algunas representaciones puede reforzar conceptos erróneos. En un estudio, el uso de papel punteado para sumar fracciones llevó a los estudiantes a utilizar con más frecuencia la estrategia incorrecta de sumar numeradores sin encontrar un denominador común.110 Representaciones que se cumplen unidades constantes, como una cinta métrica con unidades marcadas, puede ayudar a los estudiantes a ver la necesidad de fracciones unitarias comunes.

Barricada 3.2. Cuando se les anima a estimar una solución, los estudiantes aún se concentran en resolver el problema mediante un algoritmo computacional en lugar de estimarlo.

Enfoque sugerido. La estimación debe presentarse como una herramienta para anticipar el tamaño y evaluar la razonabilidad de una respuesta. Los profesores deben centrarse en el razonamiento necesario para estimar una solución y deben enfatizar que la estimación es un paso preliminar para resolver un problema, no un atajo para obtener una respuesta exacta. Los profesores que plantean problemas que no pueden resolverse rápidamente con cálculo mental (por ejemplo, problemas como 5/9 + 3/7 en lugar de 5/8 + 3/8) probablemente evitarán este obstáculo.

Recomendación 4

Desarrollar la comprensión conceptual de los estudiantes sobre las estrategias para resolver problemas de razones, tasas y proporciones antes de exponerlos a la multiplicación cruzada como un procedimiento a utilizar para resolver dichos problemas.

El razonamiento proporcional es una habilidad fundamental que los estudiantes deben desarrollar como preparación para temas más avanzados en matemáticas.111 Cuando los estudiantes "piensan proporcionalmente", comprenden la relación multiplicativa entre dos cantidades.112 Por ejemplo, comprender la relación multiplicativa en la ecuación Y = 2X significa entender que Y es dos veces más grande que X (y no que X es dos veces más grande que Y, que es lo que piensan muchos estudiantes). Los contextos que requieren comprensión de las relaciones multiplicativas incluyen problemas que involucran razones (es decir, la relación entre dos cantidades, como la proporción de niños y niñas en un salón de clases), tasas (es decir, la relación entre dos cantidades medidas en diferentes unidades, como distancia por unidad de tiempo) y proporciones (es decir, dos razones equivalentes). El razonamiento proporcional suele ser necesario en contextos cotidianos, como ajustar recetas al número de comensales o comprar material para proyectos de mejoras en el hogar; por lo tanto, los problemas de razonamiento proporcional brindan oportunidades para ilustrar el valor de aprender sobre fracciones.

El panel recomienda que los profesores desarrollen el razonamiento proporcional de los estudiantes antes de enseñar el algoritmo de multiplicación cruzada, utilizando una progresión de problemas que se base en sus estrategias de razonamiento informal. Las representaciones visuales son particularmente útiles para enseñar estos conceptos y para ayudar a los estudiantes a resolver problemas. Después de enseñar el algoritmo de multiplicación cruzada, los profesores deben volver a las estrategias de razonamiento informal, demostrar que ellos y el algoritmo conducen a las mismas respuestas en problemas para los cuales son aplicables las estrategias de razonamiento informal, discutir por qué lo hacen y también discutir problemas que puede resolverse mediante el algoritmo de multiplicación cruzada que no puede resolverse fácilmente mediante estrategias informales.

Una advertencia para los profesores: la evidencia de muchos tipos de estudios sobre resolución de problemas, incluidos los que involucran razones, tasas y proporciones, indica que los estudiantes a menudo aprenden una estrategia para resolver un problema en un contexto pero no pueden aplicar la misma estrategia en otros contextos.113 Dicho de otra manera, los estudiantes a menudo no reconocen que los problemas con diferentes historias de portada son el mismo problema matemáticamente.114 Para abordar esta cuestión, los profesores deben señalar las conexiones entre problemas con diferentes historias de portada e ilustrar cómo las mismas estrategias pueden resolverlas.

Resumen de evidencia: evidencia mínima

La evidencia para la recomendación proviene de documentos de consenso que enfatizan la importancia del razonamiento proporcional para el aprendizaje de matemáticas, así como la opinión de expertos del panel.115 Además, el panel revisó por separado evidencia relevante para pasos de acción particulares dentro de la recomendación. Estos pasos de acción están respaldados por estudios de casos que demuestran la variedad de estrategias que los estudiantes usan para resolver problemas de razones, tasas y proporciones; un estudio riguroso de los manipulativos; y dos estudios bien diseñados que enseñaron estrategias para resolver problemas planteados.

Aprovechar el desarrollo de estrategias. Tres pequeños estudios de caso proporcionaron evidencia de que los estudiantes usan una variedad de estrategias para resolver problemas de razonamiento proporcional (Paso 1).116 Algunos estudiantes inicialmente aplicaron una estrategia de acumulación (por ejemplo, para resolver 2:3 = x:12, sumaron 2:3 cuatro veces hasta llegar a 8:12, y luego dijeron x = 8), mientras que otros aplicaron una estrategia que se centró en la relación multiplicativa entre dos razones (por ejemplo, para resolver 2:3 = x:12, identificaron la relación entre los denominadores [3 × 4 = 12] y aplicó esta relación para determinar el numerador que faltaba [2 × 4 = 8], luego dijo x = 8). Sin embargo, estos estudios no examinaron si basar la instrucción en estas estrategias mejoraba el razonamiento proporcional de los estudiantes. El panel cree que el razonamiento proporcional de los estudiantes puede fortalecerse presentando una progresión de problemas que fomente el uso de estas estrategias y que proporcione una base para darse cuenta de que el procedimiento de multiplicación cruzada puede resolver algunos, pero no todos, tipos de problemas de manera más eficiente que otras estrategias.

Usando representaciones. La evidencia que respalda el uso de manipulativos y representaciones pictóricas para enseñar la proporcionalidad. Los conceptos son limitados (Paso 2). Sin embargo, un estudio que cumplió con los estándares de la WWC encontró que el uso de un manipulante mejoró la capacidad de los estudiantes de cuarto grado para visualizar y comparar dos proporciones, lo que mejoró su capacidad para resolver problemas combinados, en comparación con los estudiantes que no estuvieron expuestos a estos problemas o al manipulante. -tivo.117 En otro estudio que cumplió con los estándares WWC, los estudiantes mejoraron su capacidad para resolver problemas de proporción de valores faltantes al representar información de estos problemas en una tabla de datos que resaltaba las relaciones multiplicativas entre cantidades.118 Un tercer estudio bien diseñado un estudio encontró un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes sobre la construcción colaborativa de representaciones pictóricas en relación con el uso de representaciones generadas por los maestros.119 Estos estudios indican que los objetos manipulables y las representaciones pictóricas pueden ser herramientas de enseñanza efectivas; sin embargo, los principios que determinan cuándo son útiles y cuándo no siguen siendo poco comprendido

Enseñar estrategias de resolución de problemas. El panel también identificó evidencia limitada que respalda la recomendación de enseñar estrategias para resolver problemas planteados que involucran razones y proporciones (Paso 3). Las intervenciones examinadas en estos estudios enseñaron a los estudiantes de secundaria una estrategia de cuatro pasos para resolver problemas escritos de razones y proporciones.120 Esta estrategia desarrolló la comprensión de los estudiantes sobre las estructuras comunes de los problemas, los dirigió a usar un diagrama para identificar la información clave necesaria para resolver un problema y animó a los estudiantes a comparar diferentes estrategias de solución. Uno de estos estudios se centró en estudiantes con problemas de aprendizaje, mientras que el otro tomó como muestra estudiantes con una combinación diversa de niveles de capacidad.121 Ambos estudios encontraron un efecto positivo en la precisión de las soluciones de los estudiantes a problemas de razones y proporciones.

Cómo llevar a cabo la recomendación

1. Desarrollar la comprensión de los estudiantes sobre las relaciones proporcionales antes de enseñarles computación. Procedimientos funcionales que son conceptualmente difíciles de entender (por ejemplo, multiplicación cruzada). Aprovechar las estrategias de desarrollo de los estudiantes para resolver problemas de razones, tasas y proporciones.

Se deben brindar oportunidades para que los estudiantes resuelvan problemas de razones, tasas y proporciones antes de enseñar el algoritmo de multiplicación cruzada.[122] Los maestros pueden utilizar una progresión de problemas que se base en las estrategias de desarrollo de los estudiantes para el razonamiento proporcional.[123] En particular, los maestros Inicialmente puede plantear problemas que permitan soluciones a través de estrategias de acumulación y proporción unitaria y progresar a problemas que sean más fáciles de resolver mediante la multiplicación cruzada. Es aconsejable alentar a los estudiantes a aplicar sus propias estrategias, discutir con los estudiantes las fortalezas y debilidades de las diversas estrategias y ayudarlos a comprender por qué la solución de un problema es correcta.[124] Si los estudiantes no generan estas estrategias por sí solos, los profesores Deben presentar las estrategias como formas de resolver problemas de razones, tasas y proporciones.

Inicialmente, los maestros pueden plantear problemas narrativos que permitan a los estudiantes usar una estrategia de acumulación, en la que suman repetidamente los números dentro de una proporción para resolver el problema (ver Ejemplo 4).[125] Los problemas que facilitan el uso de la estrategia de acumulación deben tener un enfoque integrado. Relación general entre los números que componen las dos razones: una relación en la que los números en una razón se pueden generar sumando repetidamente números en la otra razón, lo que permite a los estudiantes acumular hasta el número desconocido. Por ejemplo, las razones 2:3 y 10:15 tienen una relación integral, porque sumar repetidamente 2 y 3 a la primera razón da como resultado 10:15. Por lo tanto, los problemas iniciales deben incluir proporciones en las que los estudiantes puedan aplicar fácilmente una estrategia de preparación, como por ejemplo: "Juan está horneando pan para unos amigos. Utiliza 2 tazas de harina por cada 3 amigos. Si quiere hacer pan para 15 amigos, ¿cuántas tazas de harina debe usar?

A continuación, los profesores pueden presentar problemas similares, pero con números mayores, que demuestren a los estudiantes lo lento que puede ser sumar repetidamente el valor desconocido. Los estudiantes verán la ventaja de multiplicar y dividir en lugar de depender de sumas repetidas. Por ejemplo, en el problema de hornear pan, John podría estar horneando pan para los 54 estudiantes de quinto grado.

Luego, los profesores pueden presentar problemas que no pueden resolverse inmediatamente ni mediante sumas repetidas ni multiplicando o dividiendo un número dado por un solo número entero (ver Ejemplo 4). Estos son problemas que involucran razones sin una relación integral, como $x/6 = 3/9$. Estos problemas pueden resolverse mediante la estrategia de razón unitaria, que implica reducir la razón conocida (3/9) a una forma con un numerador de 1 y luego determinar la relación multiplicativa entre la nueva razón unitaria y la razón con el elemento desconocido. ($x/6$). La relación multiplicativa entre los denominadores en la razón unitaria y la razón desconocida se puede usar para resolver el elemento faltante.

Por ejemplo, $x/6 = 3/9$ podría resolverse expresando 3/9 como 1/3, identificando 2/2 como el número que podría usarse para multiplicar 1/3 y obtener un denominador de 6 sin cambiar el valor de 1/3, multiplicando 1/3 por 2/2 para obtener 2/6 y respondiendo "$x = 2$".[126]

El mismo tipo de razonamiento se puede utilizar para resolver problemas cuya respuesta no es un número entero; por ejemplo, "Susan está preparando la cena para 6 personas y quiere usar una receta que sirva para 8 personas. La receta para 8 requiere 2 tazas de crema. ¿Cuánta crema necesitará para servir 6?" Este contexto presenta el problema como 2:8 como x:6. Los estudiantes podrían resolver este problema razonando que, dado que 2 tazas de crema sirven para 8 personas, 1 taza de crema serviría para 4 personas y 11/2 tazas de crema servirían para 6.

Se pueden utilizar problemas como los del último párrafo para ayudar a los estudiantes a reconocer las ventajas de una estrategia que puede resolver problemas independientemente de los números particulares. La multiplicación cruzada se puede introducir como tal enfoque. Los problemas que no involucran relaciones integrales y que no pueden reducirse fácilmente a fracciones unitarias ayudarán a los estudiantes a ver las ventajas de la multiplicación cruzada, que es esencialmente un procedimiento para crear razones equivalentes. Su uso se puede ilustrar con problemas como los presentados en el párrafo anterior que se resolvieron con una estrategia unitaria. Por ejemplo, se podría animar a los estudiantes a resolver el último problema.

con la estrategia de multiplicación cruzada: escribir la ecuación 2/8 = /6 y multiplicar cruzadamente para encontrar el valor que falta. Después de que los estudiantes lleguen a la misma respuesta de 11/2, los maestros pueden guiarlos en una discusión sobre por qué la razón de unidades y los procedimientos de multiplicación cruzada arrojan la misma respuesta (consulte el Ejemplo 5). Los estudiantes deben practicar tanto con problemas que se resuelven fácilmente mediante razonamiento informal y matemáticas mentales como con problemas que se resuelven fácilmente mediante multiplicación cruzada, pero no mediante estrategias de acumulación o de proporciones unitarias. Los profesores pueden animar a los estudiantes a discutir cómo anticipar qué enfoque será más fácil.

Ejemplo 4. Problemas que fomentan estrategias específicas

Los problemas de razones, tasas y proporciones se pueden resolver utilizando muchas estrategias, y algunos problemas fomentan el uso de estrategias particulares. A continuación se ilustran tres estrategias de uso común y tipos de problemas en los que cada estrategia es particularmente ventajosa.

Estrategia de acumulación

Problema de muestra. Si Steve puede comprar 3 tarjetas de béisbol por $2, ¿cuántas tarjetas de béisbol puede comprar con $10?

Enfoque de solución. Los estudiantes pueden acumular hasta la cantidad desconocida comenzando con 3 tarjetas por $2 y agregando repetidamente 3 tarjetas más y $2, obteniendo así 6 tarjetas por $4, 9 tarjetas por $6, 12 tarjetas por $8 y finalmente 15 tarjetas por $10. .

Estrategia de relación unitaria

Problema de muestra. Yukari compró 6 globos por $24. ¿Cuánto costará comprar 5 globos?

Enfoque de solución. Los estudiantes podrían descubrir que si 6 globos cuestan $24, entonces 1 globo cuesta $4. Esta estrategia se puede generalizar posteriormente a una en la que la eliminación de todos los factores comunes del numerador y denominador de la fracción conocida no dé como resultado una fracción unitaria (por ejemplo, un problema como 6/15 = x/10, en que reduciendo 6/15 resulta en 2/5).

Multiplicación cruzada

Problema de muestra. Luis suele caminar 1,5 millas hasta su escuela en 25 minutos. Sin embargo, hoy se está reparando una de las calles de su recorrido habitual, por lo que deberá tomar un recorrido de 1,7 kilómetros. Si camina a su velocidad habitual ¿cuánto tiempo le tomará llegar a su escuela?

Enfoque de solución. Este problema se puede resolver en dos etapas. Primero, como Luis camina a su “velocidad habitual”, los estudiantes saben que 1,5/25 = 1,7/x. Entonces, la ecuación se puede resolver más fácilmente mediante la multiplicación cruzada. Multiplicar 25 por 1,7 y dividir el producto por 1,5 da la respuesta de 281/3 minutos, o 28 minutos y 20 segundos. A Luis le tomaría 28 minutos y 20 segundos llegar a la escuela usando la ruta que tomó hoy.

Ejemplo 5. Por qué funciona la multiplicación cruzada

Los profesores pueden explicar por qué funciona el procedimiento de multiplicación cruzada comenzando con dos fracciones iguales, como 4/6 = 6/9. El objetivo es demostrar que cuando dos fracciones iguales se convierten en fracciones con el mismo denominador, sus numeradores también son equivalentes. Los siguientes pasos ayudan a demostrar por qué funciona el procedimiento.

Paso 1. Comienza con dos fracciones iguales, por ejemplo: 4/6 = 6/9.

Paso 2. Encuentra un denominador común usando cada uno de los dos denominadores.

a. Primero, multiplica 4/6 por 9/9, que es lo mismo que multiplicar 4/6 por 1. b. Luego, multiplica 6/9 por 6/6, que es lo mismo que multiplicar 6/9 por 1.

Paso 3. Calcula el resultado: $\frac{(4 \times 9)}{(6\times9)} = \frac{(6\times6)}{(9\times6)}$

Paso 4. Comprueba que los denominadores sean iguales. Si dos fracciones iguales tienen la mismo denominador, entonces los numeradores de las dos fracciones iguales también deben ser iguales, entonces 4 × 9 = 6 × 6.

Tenga en cuenta que en este problema, 4 × 9 = 6 × 6 es un ejemplo de (a × d = b × c).

Como resultado, los estudiantes pueden ver que la proporción original, 4/6 = 6/9, se puede resolver usando la multiplicación cruzada, 4 × 9 = 6 × 6, como procedimiento para crear razones equivalentes de manera eficiente.

2. Anime a los estudiantes a usar representaciones visuales para resolver problemas de razones, tasas y proporciones.

El panel recomienda que los profesores fomenten el uso de representaciones visuales para problemas de razones, tasas y proporciones. Los profesores deben seleccionar cuidadosamente representaciones que puedan generar una idea de un aspecto particular de los conceptos de razón, tasa y proporción.
Por ejemplo, se puede utilizar una tabla de razones para representar las relaciones en un problema de proporciones (ver Figura 9). Para identificar la cantidad de harina necesaria para 32 personas cuando una receta requiere 1 taza de harina para 8 personas, los estudiantes pueden usar una tabla de proporciones para agregar repetidamente 1 taza de harina por cada 8 personas para encontrar la cantidad correcta para 32 personas (es decir, pueden utilizar la estrategia de acumulación). Alternativamente, los estudiantes pueden usar la tabla de proporciones para ver que multiplicar la proporción por 4/4 (es decir, 4 veces la receta) proporciona la cantidad de harina necesaria para 32 personas. Esta representación visual proporciona un referente específico que los profesores pueden señalar mientras discuten con los estudiantes por qué la multiplicación conduce a la misma solución que la estrategia de acumulación.

Figura 9. Tabla de razones para un problema de proporción

Tazas de harina	1	2	3	4
Número de personas servido	8	dieciséis	24	32

Además de utilizar la tabla de razones como herramienta para resolver problemas, los profesores pueden usarla para explorar diferentes aspectos de las relaciones proporcionales, como las relaciones multiplicativas dentro y entre razones. En la tabla de proporciones de la Figura 10, la cantidad de tazas de harina necesarias es siempre 2,5 veces la cantidad de personas; por tanto, la relación entre ellos es siempre 2,5:1.

Como se analiza en la Recomendación 3, los profesores no siempre deben ofrecer representaciones a los estudiantes; a veces deberían alentar les permite crear sus propias representaciones, en este caso, representaciones de razones, tasas y proporciones.127 Antes de recibir instrucción formal en razones, los estudiantes tienden a utilizar formas tabulares u otras formas sistemáticas de mantenimiento de registros,128 que pueden ayudarlos a comprender la relación funcional. entre filas o columnas o los números en una razón.129 Los maestros deben ayudar a los estudiantes a extender estas y otras representaciones a una amplia gama de problemas de razones, tasas y proporciones.

Figura 10. Tabla de razones para explorar relaciones proporcionales

Tazas de harina	5	7.5	10	12.5
Número de personas servido	2	3	4	5

3. Brindar oportunidades para que los estudiantes utilicen y discutan estrategias alternativas para Resolver problemas de razones, tasas y proporciones.

El objetivo es desarrollar la capacidad de los estudiantes para identificar problemas con una estructura subyacente común y resolver problemas que se plantean en una variedad de contextos.130 La instrucción podría centrarse en las características significativas de diferentes tipos de problemas, incluidos los problemas de razones y proporciones. para que los estudiantes puedan transferir su aprendizaje a nuevas situaciones. Por ejemplo, los estudiantes podrían aprender primero a resolver problemas de recetas, como, "Una receta requiere 3 huevos para hacer 20 pastelitos. Si quieres hacer 80 cupcakes, ¿cuántos huevos necesitas? Una vez que hayan aprendido a resolver estos problemas, se les podría pedir a los estudiantes que resuelvan problemas similares en diferentes contextos, como por ejemplo: "Construir 3 casas para perros requiere 42 tablas; ¿Cuántas tablas se necesitan para construir 9 casetas para perros?"131

Los profesores también deben ayudar a los estudiantes a identificar la información clave necesaria para resolver un problema. Una vez que los estudiantes pueden identificar la información clave en un problema, se les puede enseñar a usar diagramas para representar esa información.132 Dichos diagramas no deben simplemente representar el problema narrativo en forma de diagrama; también deben identificar la información necesaria para resolver el problema y la relación entre las diferentes cantidades en el problema. Los profesores deben alentar a los estudiantes a utilizar diferentes diagramas y estrategias para llegar a soluciones y deben brindarles oportunidades para comparar y discutir sus diagramas y estrategias.133

El panel sugiere utilizar contextos de la vida real basados en las experiencias de los estudiantes. A continuación se proporcionan algunos ejemplos:134

- Precio unitario. Los maestros pueden plantear problemas basados en el precio unitario de un objeto, como comparar el valor de dos artículos (por ejemplo, una lata de refresco de 16 onzas por $0,89 y una lata de refresco de 12 onzas por $0,62) y determinar cuánto una cierta cantidad de un artículo cuesta dado el costo por unidad y la cantidad de unidades compradas. El contexto de los problemas de precio unitario puede ser la compra o venta de productos agrícolas en una tienda de comestibles, latas de pintura en una ferretería o cualquier otra situación de compra.

- Escalamiento. Los estudiantes pueden resolver problemas. relacionado con la ampliación o reducción de una fotografía, dibujo o forma geométrica (por ejemplo, duplicar el ancho y duplicar el largo de una fotografía para crear una nueva fotografía cuyo área sea cuatro veces mayor que la original). Otro ejemplo de escalado es usar una leyenda de mapa para encontrar la distancia real entre dos ciudades, según su distancia en el mapa.

- Recetas. Las recetas y la cocina proporcionan ajustes útiles para problemas de razones y proporciones, por ejemplo, "Si una receta requiere 1 huevo y 3 tazas de leche, y la cocinera quiere preparar la mayor cantidad posible usando los 8 huevos que tiene, ¿cuánta leche necesita?". necesario, suponiendo que la proporción de huevos a

¿Se mantiene la leche en la receta original? Los estudiantes también pueden revisar una receta para preparar más o menos la cantidad final, en situaciones que requieran cambiar la cantidad de porciones o cantidades de ingredientes usando proporciones equivalentes.

- Mezcla. Los problemas relacionados con la mezcla de dos o más líquidos proporcionan otro contexto para plantear problemas de razones y proporciones. Los estudiantes pueden comparar la concentración de una mezcla (por ejemplo, comparar la cantidad relativa de un líquido con la cantidad de otro líquido en una mezcla) o determinar cómo mantener la proporción original entre los líquidos en una mezcla si la cantidad de uno de los líquidos cambia. .

- Tiempo/velocidad/distancia. A los estudiantes se les puede decir el tiempo, la velocidad y la distancia que viajó un automóvil y los valores de dos de estas variables para un segundo automóvil y luego se les puede preguntar el valor de la tercera variable para el segundo automóvil. Por ejemplo, se les podría decir que el automóvil A viajó durante 2 horas a una velocidad de 45 millas por hora, por lo que viajó 90 millas. Luego se les podría decir que el automóvil B viajó a la misma velocidad pero viajó solo 60 millas y se les podría pedir que determinaran la cantidad de tiempo que viajó ese automóvil B.

Posibles obstáculos y soluciones

Barricada 4.1. Muchos estudiantes aplican mal la estrategia de multiplicación cruzada.

Enfoque sugerido. Presentar cuidadosamente varios ejemplos del tipo que se muestra en el Ejemplo 5 puede ayudar a los estudiantes a comprender la lógica detrás del procedimiento de multiplicación cruzada y por qué las razones dentro del problema deben estar en la forma correcta para que el procedimiento funcione. Asegurarse de que los estudiantes comprendan la lógica de cada paso de la demostración lleva tiempo, pero puede evitar muchos errores y malentendidos en el futuro.

Barricada 4.2. Algunos estudiantes confían casi exclusivamente en la estrategia de multiplicación cruzada para resolver problemas de razones, tasas y proporciones, sin reconocer que a menudo hay formas más eficientes de resolver estos problemas.

Enfoque sugerido. Los maestros deben brindarles a los estudiantes oportunidades para usar una variedad de estrategias para resolver problemas de razones, tasas y proporciones e inicialmente presentar problemas que sean más fáciles de resolver con estrategias distintas a la multiplicación cruzada. Por ejemplo, los profesores pueden presentar problemas en los que la relación dentro de la razón dada es integral (por ejemplo, 5/15) y la relación entre los números correspondientes entre las dos razones no lo es (por ejemplo, 5/15 = 6/x). Este tipo de problemas pueden alentar a los estudiantes a utilizar conocimientos previos de las relaciones multiplicativas entre numerador y denominador dentro de la razón en la que ambos se conocen. Exigir a los estudiantes que resuelvan problemas mentalmente (sin lápiz ni papel) también puede aumentar el uso de estrategias distintas a la multiplicación cruzada y desarrollar el sentido numérico con fracciones.

Barricada 4.3. Los estudiantes no generalizan estrategias en diferentes contextos de razones, tasas y proporciones.

Enfoque sugerido. Además de proporcionar a los estudiantes problemas en una variedad de contextos y enseñar una variedad de estrategias de resolución de problemas de ritmo, razón y proporción, los maestros deben esforzarse por vincular los nuevos problemas con los ya resueltos. Los profesores pueden hacer que los estudiantes juzguen periódicamente cuándo se podría utilizar la misma estrategia de solución para diferentes tipos de problemas. Por ejemplo, los profesores pueden demostrar cómo la información en dos tipos de problemas, como recetas y problemas de mezclas, se puede organizar de la misma manera y luego comparar los procedimientos de solución para los dos tipos de problemas uno al lado del o

Recomendación 5

Los programas de desarrollo profesional deberían dar alta prioridad a mejorar la comprensión de los profesores sobre las fracciones y sobre cómo enseñarlas.

Los profesores desempeñan un papel fundamental a la hora de ayudar a los estudiantes a comprender los conceptos de fracciones. Enseñar para la comprensión requiere que los propios profesores tengan una comprensión profunda de los conceptos y operaciones de fracciones, incluido un conocimiento profundo de por qué funcionan los procedimientos de cálculo. El uso apropiado de representaciones para enseñar fracciones, un aspecto clave de las recomendaciones del panel, requiere que los profesores comprendan una variedad de representaciones y cómo usarlas para ilustrar puntos particulares.

El conocimiento de conceptos erróneos comunes y de estrategias inapropiadas que los estudiantes usan para resolver problemas de fracciones también es crucial para una instrucción efectiva en esta área. El panel cree que los programas de formación docente inicial y de desarrollo profesional deben desarrollar las habilidades de los docentes en cada una de estas áreas, especialmente dada la considerable evidencia de que muchos docentes estadounidenses carecen de una comprensión profunda de los conceptos de fracciones.135

Resumen de evidencia: evidencia mínima

A pesar de la evidencia limitada relacionada con esta recomendación, el panel cree que los profesores deben desarrollar su conocimiento de las fracciones y de cómo enseñarlas. Los investigadores han encontrado consistentemente que los profesores carecen de una comprensión conceptual profunda de fracciones,136 y que el conocimiento del contenido matemático de los profesores se correlaciona positivamente con el rendimiento matemático de los estudiantes.137 En conjunto, estos hallazgos sugieren una gran necesidad de desarrollo profesional en conceptos de fracciones. De todos modos, la calificación de evidencia asignada por el panel reconoce la cantidad limitada de evidencia rigurosa sobre el efectos de las actividades de desarrollo profesional relacionadas con las fracciones.

En un estudio bien diseñado, los profesores que recibieron capacitación sobre conceptos de fracciones, sobre la comprensión de las fracciones por parte de los estudiantes, sobre la motivación de los estudiantes para aprender matemáticas y sobre cómo evaluar el conocimiento de las fracciones de los estudiantes mejoraron la comprensión conceptual de los estudiantes. clasificación de fracciones y su capacidad para calcular fracciones.138 Sin embargo, otro estudio bien diseñado no encontró ningún impacto en el rendimiento estudiantil en fracciones, decimales, porcentajes y proporciones, a pesar de ofrecer a los maestros de séptimo grado hasta 68 horas de desarrollo profesional. sobre números racionales a través de un instituto de verano y seminarios de un día.139 Otros dos estudios que cumplieron con los estándares de la WWC brindaron capacitación sobre cómo los estudiantes desarrollan conocimientos y habilidades relacionados con conceptos matemáticos específicos. Uno de estos estudios se centró en la suma y resta de números enteros y encontró mejoras en

cálculo de números enteros de los estudiantes y soluciones a problemas planteados. El segundo estudio brindó capacitación a los docentes sobre el razonamiento algebraico de los estudiantes y reportó un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes.

Las investigaciones indican que muchos maestros de escuela primaria tienen un conocimiento limitado de los conceptos y procedimientos de fracciones.140 Las entrevistas con maestros de escuela primaria de EE. UU. mostraron que un alto porcentaje de ellos no podían explicar los procedimientos computacionales para fracciones.141 Otro estudio encontró que algunos maestros de escuela primaria tenía dificultades para ordenar fracciones, sumar fracciones y resolver problemas de razones.142 Muchos de los profesores que resolvieron problemas correctamente no pudieron explicar su propio proceso de resolución de problemas.

El panel considera problemático este conocimiento limitado de las fracciones, dada la evidencia de que el conocimiento del contenido matemático de los profesores está relacionado con el aprendizaje de los estudiantes.143

Cómo llevar a cabo la recomendación

1. Desarrollar una comprensión profunda de las fracciones y los procedimientos computacionales que involucran fracciones en los maestros.

Para proporcionar una enseñanza eficaz de las fracciones, los profesores necesitan un conocimiento profundo de los conceptos y operaciones de las fracciones. En particular, los profesores necesitan comprender el razonamiento detrás de los cálculos que involucran fracciones para poder explicar clara y coherentemente a los estudiantes por qué los procedimientos funcionan, no sólo la secuencia de pasos a seguir. Sin una comprensión conceptual del cálculo de fracciones, es poco probable que los profesores ayuden a los estudiantes a entender las operaciones con fracciones.144 Por lo tanto, la preparación de los profesores y las actividades de desarrollo profesional deben apoyar un nivel más profundo de comprensión de las fracciones.145

Los profesores deberían tener oportunidades de obtener una mejor comprensión de los algoritmos de fracciones resolviendo problemas y explorando el significado de los algoritmos.146 Un enfoque es plantear problemas que provoquen problemas profundos.

discusiones sobre los algoritmos, posiblemente utilizando versiones avanzadas de ejemplos de las lecciones de los profesores.147 Por ejemplo, los profesores podrían resolver un problema en el que tienen que distribuir equitativamente partes fraccionarias de un pastel entre varias personas (por ejemplo, 3 pasteles distribuidos entre 8 personas), mientras que a los estudiantes se les puede pedir que distribuyan un número entero de galletas (por ejemplo, 18 galletas entre 6 personas).

Particularmente útiles son los problemas o actividades que llevan a los profesores a preguntarse por qué funciona un algoritmo o a examinar lo que entienden y lo que no entienden sobre un algoritmo.148 Aunque los profesores pueden abordar estos problemas solos o en grupos pequeños, hacer Es crucial disponer de tiempo para el debate.

También puede ser útil que los maestros estimen las respuestas a problemas de fracciones y discutan el razonamiento que llevó a las estimaciones. Todo

Las actividades deberían eventualmente vincularse nuevamente al aula, con oportunidades para que los maestros discutan cómo responderían a las preguntas de los estudiantes sobre por qué la estimación es valiosa y la lógica que separa los procedimientos de estimación efectivos de los menos efectivos.

El desarrollo profesional no debe centrarse exclusivamente en temas fraccionados cubiertos en el nivel de grado del maestro. Los maestros deben comprender los conceptos de fracciones cubiertos en todo el plan de estudios de la escuela primaria y secundaria y deben saber cómo estos conceptos encajan en el plan de estudios de matemáticas más amplio. El conocimiento de los conceptos de fracciones enseñados en grados anteriores garantiza que los profesores puedan aprovechar lo que los estudiantes ya saben; también puede ayudar a los profesores a identificar y abordar conceptos erróneos comunes que los estudiantes puedan haber desarrollado. Comprender los conceptos de fracciones y otras matemáticas más avanzadas que se cubrirán en grados posteriores ayuda a los maestros a establecer metas y pensar en cómo su enseñanza puede proporcionar bases para las ideas que los estudiantes encontrarán en el futuro.

2. Preparar a los profesores para utilizar representaciones pictóricas y concretas variadas de fracciones y operaciones con fracciones.

Para utilizar representaciones concretas y pictóricas de forma eficaz, los profesores deben comprender cómo estas representaciones se vinculan con los conceptos de fracciones y cómo se pueden utilizar para mejorar el aprendizaje de los estudiantes. La formación docente y las actividades de desarrollo profesional deberían preparar a los docentes para utilizar dichas representaciones en la enseñanza de fracciones y deberían ayudarlos a comprender cómo se relacionan las representaciones con los conceptos que se enseñan.

Los profesores podrían aprender, por ejemplo, que los diagramas de escenarios de intercambio pueden ayudar a resaltar el vínculo entre fracciones y división (es decir, la interpretación del cociente de las fracciones) al permitir a los estudiantes representar fracciones con partes iguales (por ejemplo, 2 brownies grandes compartidos entre 5 niños). Las rectas numéricas pueden centrar a los estudiantes en la interpretación de las medidas de fracciones, donde las fracciones representan una distancia entre dos números. Área Los modelos (especialmente los rectangulares, pero también los que utilizan otras formas) se pueden utilizar para representar representaciones de fracciones parte-todo.

Las actividades de desarrollo deben brindar oportunidades para que los docentes integren representaciones en lecciones de fracciones.149 Además, los docentes deben comprender las dificultades que pueden surgir cuando utilizan una representación pictórica o concreta para enseñar fracciones. Por ejemplo, los estudiantes pueden ver la recta numérica completa, en lugar de la distancia entre dos números, como la unidad al ubicar fracciones (por ejemplo, podrían interpretar la tarea de ubicar 3/4 en un número del 0 al 5). línea como ubicar el punto al 75% del camino a través de la recta numérica).
Las actividades de desarrollo profesional deben ayudar a los docentes a anticipar conceptos erróneos y problemas de aprendizaje que probablemente surjan, e identificar formas de abordarlos.

3. Desarrollar la capacidad de los profesores para evaluar las comprensiones y malentendidos de los estudiantes. de fracciones.

Las actividades de desarrollo profesional con profesores deben enfatizar cómo los estudiantes desarrollan una comprensión de las fracciones y los obstáculos que enfrentan al aprender sobre ellas.150 En estas discusiones se debe proporcionar información de la investigación sobre el desarrollo del aprendizaje de fracciones.151

Un método útil para lograr este objetivo es brindar a los maestros oportunidades para analizar y criticar el pensamiento de los estudiantes sobre fracciones. Esto se puede hacer examinando el trabajo escrito de los estudiantes o viendo videoclips de estudiantes resolviendo problemas diseñados para proporcionar información sobre pensamiento de los estudiantes.152 Por ejemplo, se puede pedir a los maestros que analicen las fuentes de las dificultades de los estudiantes en problemas como, "Paige tenía 3 cajas de cereal. Cada caja estaba llena a 2/3 de su capacidad. Si el cereal de las 3 cajas se vierte en cajas vacías, ¿cuántas cajas se llenarían? Utilice dibujos rectangulares o una recta numérica para mostrar su razonamiento". Se puede pedir a los profesores que graben en vídeo el desempeño de los estudiantes en dichos problemas antes de una sesión de desarrollo profesional; luego los profesores pueden traer el trabajo de los estudiantes o videoclips a la sesión y utilizarlos como base para la discusión.

Los profesores deben conocer los tipos de errores que los estudiantes cometen con mayor frecuencia cuando trabajan con fracciones y también deben comprender los conceptos erróneos subyacentes que los causan. Analizar el trabajo de los estudiantes es una forma útil de identificar áreas problemáticas y obtener información sobre los procesos de pensamiento de los estudiantes. Para ser más eficaces, los profesores deben saber cómo diseñar problemas que diagnostiquen la fuente de los errores. Por ejemplo, los profesores podrían estructurar un problema de orden decimal para evaluar si los estudiantes entienden el valor posicional (por ejemplo, ordenar los siguientes decimales de menor a mayor: 0,2, 0,12, 0,056).

Las actividades previas al servicio y durante el servicio deberían ayudar a los maestros a comprender la investigación sobre el conocimiento de las fracciones por parte de los niños; la investigación presentada debe elegirse para informar las actividades de evaluación y la instrucción de los docentes. Por ejemplo, las investigaciones han demostrado que los estudiantes a menudo tienen dificultades con los nombres de las fracciones y con la comprensión del valor de las fracciones.153 Se puede evaluar si los estudiantes en un aula determinada tienen tales dificultades pidiéndoles que enuncien fracciones que etiqueten las ubicaciones de las marcas de sombreado en una recta numérica con puntos finales de 0 y 1. Tal evaluación podría indicar que los estudiantes se refieren a una variedad de ubicaciones como 1/2, o que ven las fracciones con denominadores más grandes como más grandes que las fracciones con denominadores más pequeños. (por ejemplo, podrían pensar que 1/8 > 1/3). Tal patrón podría conducir a una discusión interesante y productiva sobre cómo funciona el sistema para nombrar fracciones y por qué ese procedimiento de denominación tiene sentido. En términos más generales, las actividades de desarrollo deberían brindar oportunidades para que los docentes practiquen la escritura o seleccionen problemas que evalúen con precisión la comprensión de los estudiantes y utilicen los resultados de las evaluaciones para diseñar lecciones útiles.

Posibles obstáculos y soluciones

Barricada 5.1. Los administradores o el personal de desarrollo profesional podrían argumentar que el tema de las fracciones es sólo uno de muchos que los maestros de primaria y secundaria deben estar preparados para enseñar y que su distrito, programa o escuela no pueden dedicarle más tiempo o recursos.

Enfoque sugerido. El panel reconoce que el tiempo y los recursos para brindar desarrollo profesional son limitados. Sin embargo, se puede presentar un argumento convincente para dedicar algo de tiempo y recursos a este tema: (1) las fracciones son una base fundamental para las matemáticas más avanzadas, (2) muchos profesores carecen de una comprensión suficiente de las fracciones para enseñar el tema de manera eficaz, y (3) Los estudiantes estadounidenses están más rezagados que los de otros países en la resolución de problemas con fracciones que en la resolución de problemas con números enteros.154 El panel cree que es fundamental que los profesores de primaria y secundaria reciban desarrollo profesional relacionado con su conocimiento del contenido. de fracciones y a la enseñanza de fracciones, incluidos decimales, porcentajes, razones, tasas y proporciones. El panel sugiere que los líderes escolares y distritales consideren las fracciones una alta prioridad para el desarrollo profesional.

Barricada 5.2. Algunos profesores tienen dificultades con temas de números enteros, como la multiplicación y la división, que están relacionados con la enseñanza de fracciones.

Enfoque sugerido. Una comprensión profunda de la multiplicación y división de números enteros, incluido por qué y cómo funcionan los algoritmos computacionales comunes, es esencial para enseñar fracciones de manera efectiva. Al seleccionar o diseñar actividades de desarrollo profesional relacionadas con fracciones, los líderes educativos deben considerar si revisar estos temas clave sobre números enteros es un requisito previo necesario para los docentes de una escuela o distrito en particular.

Barricada 5.3. Algunos profesores no creen que sea necesario un desarrollo profesional adicional que incluya fracciones.

Enfoque sugerido. Aunque la mayoría de los profesores son capaces de calcular con fracciones, muchos no tienen una sólida formación conceptual sobre fracciones o una comprensión de la lógica subyacente a los algoritmos computacionales utilizados para resolver problemas de fracciones. Al determinar primero si los profesores saben por qué y cómo funcionan los algoritmos computacionales comunes (por ejemplo, invertir y multiplicar) y por qué son necesarios ciertos pasos dentro de los algoritmos (por ejemplo, establecer denominadores comunes para la suma y la resta), los líderes educativos pueden decidir si el desarrollo profesional involucra fracciones es una necesidad importante en sus escuelas o distritos.

Glosario

C

Fracción común : una fracción escrita en la forma a/b, donde tanto a como b son números enteros y b no es igual a cero (por ejemplo, 3/4, 6/5, – (1/8)).

Covariación : medida de cuánto cambian dos cantidades juntas. Por ejemplo, la medida en que una cantidad aumenta a medida que aumenta otra cantidad.

D

Denominador : para cualquier fracción a/b, el denominador es el número debajo de la línea hash. El denominador representa el divisor de un problema de división, o el número de partes en las que se divide una cantidad entera (por ejemplo, para la fracción 2/3, el denominador 3 se refiere a un entero dividido en tres partes).

mi

Compartir equitativamente : la actividad de distribuir completamente un objeto o conjunto de objetos por igual entre un grupo de personas.

Fracciones equivalentes : fracciones que representan el mismo valor numérico; fracciones iguales. Por ejemplo, 2/4 y 4/8 son ambos iguales a 1/2; por lo tanto, 2/4, 4/8 y 1/2 son fracciones equivalentes.

F

Densidad de fracción : el concepto de que entre dos fracciones cualesquiera hay otra fracción. Por ejemplo, la fracción 1/4 está entre 0 y 1/2; la fracción 1/8 está entre 0 y 1/4; y la fracción 1/16 está entre 0 y 1/8. Una consecuencia de este hecho es que entre dos fracciones cualesquiera hay un número infinito de fracciones.

I

Fracción impropia : fracción con un numerador mayor o igual que el denominador. Ejemplos de fracciones impropias incluyen 5/5, 9/8 y 14/9.

METRO

Número mixto : fracción escrita como un número entero y una fracción menor que uno. Ejemplos de números mixtos incluyen 12/3, 43/8 y –25/6.

Relación multiplicativa : relación entre dos cantidades en la que una cantidad se puede multiplicar por una. factor para obtener una segunda cantidad.

norte

Numerador : para cualquier fracción común a/b, el numerador es el número que se encuentra encima de la línea hash. El numerador representa el dividendo de un problema de división o el número de partes fraccionarias representadas por una fracción (por ejemplo, para la fracción 2/3, el numerador 2 representa el número de tercios).

PAG

Porcentaje : cualquier número expresado como fracción o razón de 100 (es decir, con un denominador de 100). Por ejemplo, 75% equivale a 0,75 o 75/100.

Proporción : expresión de dos razones o fracciones equivalentes. Una proporción es una ecuación escrita en la forma a/b = c/d, indicando así que las dos razones son equivalentes.

Razonamiento proporcional : la literatura consta de varias definiciones diferentes de razonamiento proporcional. En un nivel básico, el término significa comprender y trabajar con las relaciones subyacentes en proporciones.155 Otros describen el razonamiento proporcional como la capacidad de comparar una cantidad relativa con otra,156 o la capacidad para comprender relaciones multiplicativas o razonar sobre situaciones multiplicativas.157

q

Cociente : la solución a un problema de división. Por ejemplo, 3 es el cociente del siguiente problema de división: 12 ÷ 4 = 3.

R

Número racional : cualquier número que se pueda expresar en la forma a/b , donde a y b son ambos números enteros. y b no es igual a cero. Los números racionales pueden adoptar muchas formas diferentes, incluidas fracciones comunes, proporciones, decimales y porcentajes.

Tasa : la relación entre dos cantidades medidas en diferentes unidades. Por ejemplo, distancia por unidad de tiempo.

Razón : la relación entre dos cantidades. Por ejemplo, la proporción 2:3 podría representar la relación entre el número de niños y niñas en un salón de clases, o dos niños por cada tres niñas en la clase.

Ud.

Fracción unitaria : una fracción con un numerador de uno (por ejemplo, 1/3, 1/11).

Proporción unitaria : una proporción con un denominador de uno (por ejemplo, 5:1, 9:1).

W.

Números enteros : el conjunto de números que comienzan con cero y aumentan en uno (es decir, 0, 1, 2, 3…).

Apéndice A

Posdata del Instituto de Ciencias de la Educación

¿Qué es una guía práctica?

El Instituto de Ciencias de la Educación (IES) publica guías prácticas para compartir evidencia rigurosa y orientación de expertos sobre cómo abordar los desafíos relacionados con la educación que no se resuelven con un solo programa, política o práctica. El panel de expertos de cada guía práctica desarrolla recomendaciones para un enfoque coherente a un problema multifacético. Cada recomendación está explícitamente relacionada con la evidencia que la respalda. Utilizando estándares para una investigación rigurosa, la evidencia de respaldo se califica para reflejar qué tan bien la investigación demuestra que las prácticas recomendadas son efectivas. Una evidencia sólida significa que los hallazgos positivos se demuestran en múltiples estudios bien diseñados y bien ejecutados, lo que deja poca o ninguna duda de que los efectos positivos son causados por la práctica recomendada. La evidencia moderada significa que los estudios bien diseñados muestran impactos positivos, pero quedan algunas preguntas sobre si los hallazgos pueden generalizarse o si los estudios muestran definitivamente que la práctica es efectiva. Evidencia mínima significa que los datos pueden sugerir una relación entre la práctica recomendada y los resultados positivos, pero las investigaciones no han demostrado que la práctica sea la causa de los resultados positivos. (Consulte la Tabla 1 para obtener más detalles sobre los niveles de evidencia).

¿Cómo se desarrollan las guías de práctica?

Para producir una guía práctica, IES primero selecciona un tema. La selección del tema se basa en consultas y solicitudes al servicio de asistencia técnica de What Works Clearinghouse, encuestas formales a profesionales y una búsqueda bibliográfica limitada de la base de investigación del tema. A continuación, IES contrata a un presidente del panel que tenga reputación nacional y experiencia en el tema. El presidente, en colaboración con IES, selecciona a los panelistas para que sean coautores de la guía. Los panelistas se seleccionan en función de su experiencia en el área temática y la creencia de que pueden trabajar juntos para desarrollar recomendaciones relevantes basadas en evidencia. IES recomienda que el panel incluya al menos un profesional con experiencia relevante.

El panel recibe una plantilla general para desarrollar una guía práctica, así como ejemplos de guías prácticas publicadas. Los panelistas identifican las investigaciones más importantes con respecto a sus recomendaciones y aumentan esta literatura con una búsqueda de publicaciones recientes para garantizar que la evidencia que las respalda esté actualizada. La búsqueda está diseñada para encontrar todos los estudios que evalúan la efectividad de un programa o práctica en particular. Luego, estos estudios son revisados según los estándares de What Works Clearinghouse (WWC) por revisores certificados que califican cada estudio de efectividad. El personal de WWC ayuda a los panelistas a compilar y resumir la investigación y producir la guía práctica.

Luego, las guías de práctica de IES se someten a una rigurosa revisión externa por pares. Esta revisión se realiza independientemente del personal de IES que apoyó el desarrollo de la guía. Una tarea crítica de los revisores pares de una guía práctica es determinar si la evidencia citada en apoyo de recomendaciones particulares está actualizada y si no se han publicado estudios de calidad similar o mejor que apuntan en una dirección diferente. pasado por alto. Los pares revisores también evalúan si el nivel de categoría de evidencia asignado a cada recomendación es apropiado. Después de la revisión, se revisa una guía práctica para satisfacer cualquier inquietud de los revisores y obtener la aprobación de los estándares y del personal de revisión de IES.

Una nota final sobre las guías de práctica de IES

En el ámbito político y en otros ámbitos, los paneles de expertos suelen intentar crear un consenso, forjando declaraciones que todos sus miembros respaldan. Pero las guías de práctica hacen más que encontrar puntos en común; Crean una lista de recomendaciones prácticas. Cuando la investigación muestra claramente qué prácticas son efectivas, los panelistas utilizan esta evidencia para guiar sus recomendaciones. Sin embargo, en algunos casos, la investigación no proporciona una indicación clara.

de lo que funciona, y la interpretación de los panelistas de la evidencia existente (pero incompleta) juega un papel importante a la hora de guiar las recomendaciones. Como resultado, es posible que dos equipos de expertos reconocidos que trabajan de forma independiente para producir una guía práctica sobre el mismo tema lleguen a conclusiones muy diferentes. Quienes utilicen las guías deben reconocer que las recomendaciones representan, de hecho, el consejo de consultores.

Sin embargo, el consejo podría ser mejor que lo que una escuela o distrito podría obtener por sí solo. Los autores de las guías de práctica son expertos reconocidos a nivel nacional que respaldan colectivamente las recomendaciones, justifican sus elecciones con evidencia que las respalda y enfrentan una rigurosa revisión independiente de sus conclusiones. Es probable que las escuelas y los distritos no encuentren un enfoque tan integral cuando busquen el asesoramiento de consultores individuales.

Instituto de Ciencias de la Educación

apéndice B

Sobre los autores

Panel

Robert Siegler, Ph.D., es profesor Teresa Heinz de Psicología Cognitiva en la Universidad Carnegie Mellon. Su investigación actual se centra en el desarrollo de habilidades de estimación y en cómo la comprensión básica de los números de los niños influye en su estimación y en su rendimiento general en matemáticas. La teoría general del desarrollo cognitivo de ondas superpuestas, descrita por Siegler en su libro Emerging Minds de 1996, ha demostrado ser útil para comprender la adquisición de una variedad de habilidades y conceptos matemáticos. Sus otros libros incluyen Cómo los niños descubren nuevas estrategias, Cómo se desarrollan los niños y El pensamiento de los niños.
Siegler fue profesor visitante distinguido Tisch en Teachers College, Universidad de Columbia, durante 2009/2010 y fue miembro del Panel Asesor Nacional de Matemáticas del Presidente de 2006 a 2008. Recibió la beca Brotherton de la Universidad de Melbourne en 2006 y la Premio a la Contribución Científica Distinguida de la Asociación Estadounidense de Psicología en 2005.

Thomas Carpenter, Ph.D., es profesor emérito de currículo e instrucción en la Universidad de Wisconsin-Madison y director del Centro de Educación sobre Diversidad en Matemáticas para el Aprendizaje y la Enseñanza. Su investigación investiga cómo se desarrolla el pensamiento matemático de los niños, cómo los maestros utilizan conocimientos específicos sobre el pensamiento matemático de los niños en la instrucción y cómo el pensamiento de los niños puede usarse como base para el desarrollo profesional. El Dr. Carpenter es ex editor del Journal for Research in Mathematics Education. Junto con Eliza-beth Fennema, Megan Franke y otros, desarrolló el proyecto de investigación y desarrollo profesional sobre instrucción guiada cognitivamente. Actualmente se centra en cuestiones de equidad y justicia social en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Francis (Skip) Fennell, Ph.D., es profesor de educación en McDaniel College y proyecto director del Proyecto de Especialistas en Matemáticas de Primaria y Líderes Docentes. El Dr. Fennell ha publicado ampliamente en revistas profesionales y libros de texto relacionados con la educación matemática de primaria y secundaria, y formó parte del Panel Asesor Nacional de Matemáticas, presidiendo el Grupo de Trabajo sobre Conocimientos y Habilidades Conceptuales. En 2008, completó una presidencia de dos años del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas. Se desempeñó como uno de los redactores de los Principios y Estándares para Matemáticas Escolares y los Puntos Focales del Currículo, ambos para el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas. Actualmente, el Dr. Fennell es investigador principal de un proyecto destinado a diseñar un plan de estudios de posgrado para profesores líderes de matemáticas de primaria, crear un centro de intercambio de materiales existentes y desarrollar materiales de apoyo para especialistas en matemáticas de primaria y profesores líderes.

David Geary, Ph.D., es psicólogo del desarrollo cognitivo, además de profesor de curadores y profesor Thomas Jefferson en el departamento de ciencias psicológicas de la Universidad de Missouri. Ha estado estudiando las diferencias individuales y de desarrollo en las competencias matemáticas básicas durante más de 20 años y actualmente dirige un estudio longitudinal sobre el desarrollo matemático y los trastornos del aprendizaje de los niños. Geary es autor de tres libros, incluido Children's Mathematical Development, y coautor de un cuarto. Además, formó parte del Panel Asesor Nacional de Matemáticas y fue uno de los principales contribuyentes al Marco de Matemáticas de 1999 para las Escuelas Públicas de California desde jardín de infantes hasta el grado 12.

Las distinciones recibidas incluyen el Premio del Canciller por Investigación Destacada y Actividad Creativa en Ciencias Sociales y del Comportamiento y un premio MERIT de los Institutos Nacionales de Salud.

W. James (Jim) Lewis, Ph.D., es profesor Aaron Douglas de Matemáticas en la Universidad de Nebraska-Lincoln (UNL), así como director del Centro de Ciencias, Matemáticas y Educación Informática de la escuela.
El Dr. Lewis es el investigador principal de dos

Asociaciones de Ciencias Matemáticas de la Fundación Nacional de Ciencias, NebraskaMATH y la Asociación del Instituto Math in the Middle. Fue presidente de la Junta de Conferencia del comité de Ciencias Matemáticas que produjo La educación matemática de los docentes y copresidente del comité del Consejo Nacional de Investigación que produjo el informe Educar a los docentes de ciencias, matemáticas y tecnología: nuevas prácticas para los nuevos Milenio. El Dr. Lewis también fue co-investigador principal de Math Matters, una subvención de la Fundación Nacional de Ciencias para revisar la educación matemática de los futuros maestros de escuela primaria en la UNL.

Yukari Okamoto, Ph.D., es profesora del departamento de educación de la Universidad de California-Santa Bárbara. Su trabajo se centra en el desarrollo cognitivo, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, y los estudios transculturales. Está particularmente interesada en la adquisición de conceptos matemáticos, científicos y espaciales por parte de los niños y participó en los estudios en video sobre la enseñanza de las matemáticas y las ciencias como parte del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS). Las publicaciones recientes del Dr. Okamoto incluyen Vinculación de representaciones de números racionales para estudiantes de cuarto grado: un enfoque de método mixto y Comparación del servicio de maestros de escuelas primarias estadounidenses y japoneses para vincular representaciones de números racionales.

Laurie Thompson, MA, tiene 10 años de experiencia como maestra de primaria y maestra de recursos matemáticos. Su experiencia incluye la enseñanza de 1.º, 3.º, 4.º y 5.º grado en el condado de Carroll, Maryland; Escuelas Públicas del Condado de Loudon, Virginia; y el Distrito Escolar Independiente de Katy, Texas. Como maestra de recursos de matemáticas de primaria en el condado de Loudon, la Sra. Thompson trabajó con maestros de matemáticas de primaria para enseñar lecciones en equipo, organizar centros de instrucción guiada y llevar a cabo instrucción en grupos pequeños. En este cargo, también desarrolló y evaluó lecciones y materiales de matemáticas para las aulas de jardín de infantes a quinto grado. Se ha desempeñado como mentora y líder de equipo para nuevos maestros y participó en comunidades de aprendizaje profesional.

Jonathan Wray, MA, es el facilitador de instrucción para los programas curriculares de matemáticas de secundaria en el sistema de escuelas públicas del condado de Howard (Maryland). Recientemente completó un mandato de dos años como presidente del Consejo de Profesores de Matemáticas de Maryland (MCTM). El Sr. Wray fue seleccionado como Maestro Mentor Destacado de MCTM en 2002 y como Líder Tecnológico Destacado en Educación de su distrito por la Sociedad de Tecnología Educativa de Maryland en 2004.

Es miembro del panel editorial de Teaching Children Mathematics, una revista revisada por pares producida por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas. El Sr. Wray también se ha desempeñado como maestro de aula para los grados primarios e intermedios, maestro de recursos para superdotados y talentosos, maestro de recursos de matemáticas para primaria, desarrollador de planes de estudios y evaluaciones, y consultor educativo.

Personal

Jeffrey Max es investigador de Mathematica Policy Research con experiencia en la realización de evaluaciones en el área de educación. Su trabajo actual se centra en cuestiones de calidad docente, incluidas medidas de eficacia docente, la distribución de la calidad docente y la reforma de la remuneración docente. El Sr. Max también contribuye a What Works Clearinghouse, y anteriormente trabajó en la guía práctica que aborda el acceso a la educación superior. Su experiencia previa incluye la enseñanza de jardín de infantes en una escuela pública de Nueva Orleans.

Moira McCullough es analista de investigación en Mathematica Policy Research y tiene experiencia en evaluaciones e investigaciones educativas. La Sra. McCullough ha trabajado extensamente para What Works Clearinghouse. Es revisora certificada de estudios en varias áreas y coordinó el área temática de matemáticas de la escuela primaria. Ella contribuyó a la práctica.

guía que aborda el acceso a la educación superior y las perspectivas de investigación que sintetiza las recomendaciones de expertos a los estados y distritos escolares para el uso de fondos de la Ley Estadounidense de Recuperación y Reinversión. También tiene experiencia en medidas de eficacia docente en matemáticas.

Andrew Gothro es analista de investigación en Math-ematica Policy Research. Tiene experiencia brindando apoyo a la investigación y realizando análisis de datos cuantitativos sobre temas que van desde el desarrollo infantil hasta programas contra la pobreza. El Sr. Gothro apoyó al panel en este proyecto identificando y organizando investigación, sintetizar hallazgos de estudios revisados y elaborar lenguaje para una audiencia de profesionales de la educación.

Sarah Prenovitz es asistente de investigación/ programadora en Mathematica Policy Research. Tiene experiencia brindando apoyo a la investigación y realizando análisis de datos para estudios de programas de incentivos docentes y programas de desarrollo profesional, así como programas para apoyar y fomentar el empleo para personas con discapacidades. También ha desarrollado materiales complementarios para acompañar un plan de estudios para el personal de Head Start sobre el uso de la evaluación continua para dar forma a la práctica en el aula.

Apéndice C

Divulgación de posibles conflictos de intereses

Los paneles de guías prácticas están compuestos por personas que son expertos reconocidos a nivel nacional en los temas sobre los cuales hacen recomendaciones. IES espera que los expertos participen profesionalmente en una variedad de asuntos relacionados con su trabajo como panel. Se solicita a los miembros del panel que revelen estas actividades profesionales e instituyan procesos deliberativos que fomenten el examen crítico de sus puntos de vista en relación con el contenido de la guía práctica. La influencia potencial de las actividades profesionales de los miembros del panel se ve aún más atenuada por el requisito de que basen sus recomendaciones en evidencia documentada en la guía práctica. Además, antes de publicar todas las guías de práctica, se someten a una revisión externa independiente por pares que se centra en si la evidencia relacionada con las recomendaciones de la guía se ha presentado de manera adecuada.

A continuación se detallan las actividades profesionales informadas por cada miembro del panel que parecen estar más estrechamente asociadas con las recomendaciones del panel.

Jim Lewis recibe regalías como autor de Math Vantage, un plan de estudios de matemáticas para estudiantes de secundaria. Este programa no se menciona en la guía.

Apéndice D

Justificación de las calificaciones de la evidenciasa

El panel realizó una búsqueda inicial de investigaciones entre 1989 y 2009 sobre prácticas para mejorar el aprendizaje de fracciones de los estudiantes. La búsqueda se centró en estudios de intervenciones para enseñar fracciones a estudiantes desde jardín de infantes hasta octavo grado que no se centraban exclusivamente en estudiantes con diagnóstico de discapacidades de aprendizaje; Los estudios examinaron a estudiantes tanto en los Estados Unidos como en otros países.

Los panelistas identificaron más de 3000 estudios a través de esta búsqueda inicial, incluidos 125 con diseños causales revisados de acuerdo con los estándares What Works Clearinghouse (WWC). Veintiséis de los estudios cumplieron con los estándares de evidencia con o sin reservas. Dada la limitada investigación sobre prácticas para mejorar el conocimiento de fracciones de los estudiantes, el panel amplió su búsqueda más allá de las fracciones para identificar estudios relevantes para las rectas numéricas (Recomendación 2) y el desarrollo profesional (Recomendación 5). Esto llevó a los miembros del panel a siete estudios adicionales que cumplían con los estándares con o sin reservas. Del total de 33 estudios que cumplieron con los estándares de validez causal de la WWC y estaban ampliamente relacionados con el tema, 20 estudios fueron relevantes para las recomendaciones específicas del panel. El panel también examinó estudios que no tenían diseños elegibles para una revisión del WWC pero que eran relevantes para las recomendaciones, incluidos estudios correlacionales, estudios de casos y experimentos de enseñanza.

Recomendación 1. Aproveche la comprensión informal de los estudiantes sobre compartir y proporcionalidad para desarrollar conceptos iniciales de fracciones.

Nivel de evidencia: Evidencia mínima

El panel asignó una calificación de evidencia mínima a esta recomendación. La recomendación se basa en siete estudios que muestran que los estudiantes tienen una comprensión temprana de compartir y proporcionalidad158 y dos estudios de instrucción que utilizaron escenarios de compartir para enseñar conceptos de fracciones.159 Sin embargo, ninguno de los estudios en este último grupo cumplió con los estándares de la WWC. . A pesar de esta evidencia limitada, el panel cree que el conocimiento informal de los estudiantes sobre cómo compartir y proporcionalidad proporciona una base para enseñar conceptos de fracciones.

El panel examinó por separado la investigación sobre actividades compartidas y relaciones proporcionales para esta recomendación.

Compartir actividades. Los niños tienen la capacidad de crear partes iguales a una edad temprana. Los niños de tan solo 5 años pueden completar tareas básicas de compartir que implican distribuir uniformemente un conjunto de 12 o 24 objetos entre dos a cuatro destinatarios.160 En un estudio, la mayoría de los niños de 5 años podían hacer esto incluso cuando usaban diferentes objetos. tamaño unidades (es decir, distribuir equitativamente bloques simples, dobles y triples). La capacidad de crear partes iguales mejora con la edad; los niños de 6 años obtienen mejores resultados que los de 4 y 5 años.161 Compartir objetos continuos es más difícil para los niños pequeños que compartir un conjunto de objetos: niños en un estudio tuvo más dificultades para compartir una cuerda entre tres destinatarios que para compartir un juego de galletas.162

La comprensión de los niños sobre cómo compartir no se extiende necesariamente a los conceptos subyacentes de fracciones. Muchos estudiantes no entienden que compartir el mismo conjunto de objetos con más personas resulta en porciones más pequeñas para cada persona.163 Un estudio que potencialmente cumplió con los estándares mostró una mejor comprensión de este concepto entre los estudiantes de jardín de infantes a quienes se les dieron resultados al compartir escenarios con diferentes números. de participantes (es decir, diferentes denominadores).164 Este estudio demostró el potencial de utilizar actividades de compartir como base para enseñar conceptos tempranos de fracciones. Sin embargo, no se pudo completar una revisión del estudio porque no se proporcionó información suficiente sobre el número de escuelas asignadas a cada condición.

Dos estudios de caso mostraron cómo una comprensión temprana de compartir podría usarse para enseñar fracciones a estudiantes de primaria.165

a Los estudios elegibles que cumplen con los estándares de evidencia del WWC o que cumplen con los estándares de evidencia con reservas se indican en negrita en las notas finales y en las páginas de referencias.

En ambos estudios, un profesor planteó varios problemas narrativos basados en escenarios compartidos para enseñar conceptos de fracciones como equivalencia y ordenación, así como cálculo de fracciones. Por ejemplo, los estudiantes resolvieron problemas sobre personas que compartían diferentes cantidades de comida o el uso de asientos para compartir un conjunto de objetos de diferentes maneras.
La instrucción en ambos estudios incluyó problemas escritos basados en situaciones realistas, oportunidades para que los estudiantes usaran sus propios dibujos y estrategias para obtener soluciones, y discusiones con toda la clase.

Uno de estos estudios examinó un plan de estudios holandés para estudiantes de 4º grado, pero no cumplió con los estándares porque solo se asignó un aula al tratamiento.166 El otro estudio presentó una unidad de instrucción de cinco semanas a 17 estudiantes de 1º grado, pero carecía de un grupo control, por lo que no tuvo un diseño revisable.
Sin embargo, ambos estudios informaron resultados positivos al utilizar escenarios de intercambio para enseñar conceptos de fracciones.167

Relaciones proporcionales. Los niños pequeños tienen una comprensión temprana de las relaciones proporcionales. Tres estudios presentaron proporciones con figuras geométricas u objetos cotidianos y pidieron a los estudiantes que identificaran o crearan una proporción coincidente.168 Por ejemplo, en un estudio, el experimentador simuló comer una porción de pizza y los niños simularon comer la misma proporción de una caja de chocolates.169 En otro estudio, los estudiantes igualaron proporciones representadas por cajas llenas de ladrillos azules y blancos.170 A los 6 años, los niños igualaron proporciones equivalentes en todos estos estudios.

La mitad juega un papel importante en las primeras habilidades de razonamiento proporcional de los niños. Los niños obtuvieron mejores resultados al elegir entre opciones que cruzaban el medio punto (es decir, una cifra estaba más de la mitad y la otra estaba menos de la mitad) que entre dos proporciones que eran más o menos que uno. medio lleno.171 Los niños tendían a tener más dificultades para igualar proporciones representadas por objetos discretos que por objetos continuos.172

La comprensión temprana de las relaciones proporcionales por parte de los niños también se refleja en su capacidad para resolver analogías básicas. Las analogías son similares a las proporciones en el sentido de que los estudiantes deben identificar una relación en el primer conjunto de elementos y luego aplicar esta relación a un segundo conjunto de elementos. Un estudio encontró que los niños de 6 y 7 años obtuvieron resultados superiores al azar en analogías basadas en patrones simples o equivalencia proporcional.173 Por ejemplo, los estudiantes podrían completar la analogía: "Un medio círculo es a un medio rectángulo como un cuarto de círculo a un cuarto de rectángulo". Un estudio encontró que los niños podían mapear los tamaños relativos de los artículos dentro de un conjunto de tres artículos con los tamaños relativos de los artículos dentro de otro conjunto de tres objetos.174 Por ejemplo, cuando el experimentador seleccionó la mayor de tres tazas de diferentes tamaños, los niños podían Elige la taza correspondiente de su juego de tres taz

El panel no identificó estudios que cumplieran con los estándares que examinaran el efecto del uso de este conocimiento temprano para enseñar conceptos de fracciones. Sin embargo, un estudio que potencialmente cumplió con los estándares examinó una forma de mejorar la capacidad de los estudiantes para igualar proporciones equivalentes.175 El autor brindó comentarios y explicaciones a niños de 6 a 8 años sobre cómo usar el medio límite para identificar proporciones equivalentes. dimensiones. Esta estrategia centró a los niños en la relación parte-parte entre áreas sombreadas y no sombreadas utilizadas para representar proporciones; El autor informó efectos positivos sobre la capacidad de los niños para identificar cuál de dos vasos estaba más lleno y, por lo tanto, sobre si los estudiantes podían diferenciar entre cantidades absolutas y relativas de agua.

Recomendación 2.

Ayude a los estudiantes a reconocer que las fracciones son números y que expanden el sistema numérico más allá de los números enteros. Utilice rectas numéricas como herramienta de representación central para enseñar este y otros conceptos de fracciones desde los primeros grados en adelante.

Nivel de evidencia: Evidencia moderada

El panel califica esta recomendación como respaldada por evidencia moderada, basada en tres estudios que cumplieron con los estándares de la WWC y utilizaron rectas numéricas para enseñar a los estudiantes sobre las magnitudes de los números enteros;176 un estudio que cumplió con los estándares de la WWC y demostró que la enseñanza con rectas numéricas mejoró la comprensión de los estudiantes sobre las fracciones decimales;177 y cuatro estudios que demostraron fuertes correlaciones entre las estimaciones de la recta numérica con números enteros y el desempeño en pruebas de rendimiento en aritmética y matemáticas.178 Otro estudio demostró que una propiedad de las estimaciones de la recta numérica que ha sido documentada ampliamente con números enteros también está presente con fracciones (específicamente, logarítmicas). a transiciones lineales en patrones). Esto sugiere que las representaciones de magnitudes numéricas influyen en la comprensión de las fracciones y de los números enteros.179 El panel cree que, dada la clara aplicabilidad de las rectas numéricas a las fracciones y a los números enteros, estos hallazgos indican que las rectas numéricas pueden mejorar el aprendizaje de las fracciones. para estudiantes de primaria y secundaria.

La evidencia que respalda esta recomendación incluye estudios que examinaron el uso de rectas numéricas y otras representaciones lineales para enseñar conceptos de números enteros y fracciones.

Rectas numéricas para conceptos de números enteros. (ver Tabla D.1.) Tres estudios que cumplieron con los estándares encontraron que jugar brevemente un juego de mesa lineal con números mejoró la comprensión de los estudiantes de preescolar sobre la magnitud de los números enteros.180 En los estudios, estudiantes de bajos ingresos jugaron un tablero numérico juego de 20 a 30 veces en el transcurso de cuatro a cinco sesiones de 15 a 20 minutos cada una. El juego consistía en mover un marcador uno o dos espacios a la vez a través de un tablero horizontal que tenía los números del 1 al 10 enumerados en orden de izquierda a derecha en cuadrados consecutivos.
Los estudiantes usaron una ruleta para determinar si debían hacer uno o dos movimientos y luego dijeron en voz alta el número que habían girado y los números en los cuadrados mientras se movían. El experimentador jugó con cada niño y ayudó a cada uno a nombrar correctamente los números. Los estudiantes de control en dos de los estudios jugaron el mismo juego pero con colores en lugar de que los números,181 y los estudiantes de control en el otro estudio completaron tareas de conteo e identificación de números.182

El juego de mesa lineal, que el panel considera como un sustituto de las rectas numéricas, tuvo un efecto positivo en la capacidad de los estudiantes para comparar el tamaño de números enteros. Los autores de los tres estudios informaron tamaños de efecto significativos de 0,75, 0,99 y 1,17 en la precisión al comparar números enteros (de 0 a 10).183 El juego de mesa lineal también mejoró la capacidad de los estudiantes participantes para ubicar números enteros en una recta numérica. precisamente. Estos estudios miden la precisión de las estimaciones de la recta numérica de los estudiantes utilizando una medida llamada porcentaje de error absoluto, que es la diferencia entre la estimación de un estudiante y el número real dividido por la escala de la recta numérica. Dos de los estudios encontraron tamaños del efecto para el error absoluto porcentual de 0,63 (informado por el autor) y 0,86 (calculado por WWC).184 Uno de los estudios también informó que jugar mejoraba significativamente la capacidad de los estudiantes para aprender las respuestas a problemas de suma en que recibieron retroalimentación.185

La investigación que respalda el uso de rectas numéricas con números enteros incluye dos estudios adicionales que cumplieron con los estándares de la WWC. En uno de los estudios, los estudiantes colocaron 10 números espaciados uniformemente en una recta numérica antes de ubicarlos en una recta numérica del 0 al 100.186 Los autores informan que este enfoque condujo a un aumento sustancialmente importante, pero no significativo, en la precisión de las mediciones de los estudiantes. las estimaciones de la recta numérica, mientras que los estudiantes del grupo de control, que localizaron un número a la vez, no mejoraron.187 (La WWC define efectos sustancialmente importantes o grandes sobre los resultados como aquellos con tamaños de efecto superiores a 0,25 desviaciones estándar .188)

El segundo estudio de apoyo utilizó una recta numérica para mejorar el desempeño de los estudiantes de primer grado en problemas de suma para los cuales habían sido capacitados.189 Los estudiantes del grupo de tratamiento observaron los sumandos y las sumas de cuatro problemas de suma en una recta numérica; Los estudiantes del grupo de control recibieron retroalimentación sobre los problem

Tabla D.1. Estudios de intervenciones que utilizaron rectas numéricas para mejorar la comprensión de la magnitud de los números enteros que cumplieron con los estándares de la WWC (con o sin reservas)

Citación	Nivel de grado	Análisis Tamaño de la muestra	Intervención	Comparación
Siegler y Ramani (2008)	Preescolar	36 estudiantes	Los estudiantes juegan un juego de mesa lineal con números.	Los estudiantes juegan un juego de mesa lineal con colores.
Ramani y Siegler (2008)	Preescolar	112 estudiantes	Los estudiantes juegan un juego de mesa lineal con números.	Los estudiantes juegan un juego de mesa lineal con colores.
Siegler y Ramani (2009)	Preescolar	88 estudiantes	Los estudiantes juegan un juego de mesa lineal con números.190	Los estudiantes participan en tareas de conteo e identificación de números.
Siegler y Booth (2004)	1º y 2º191	55 estudiantes	Los estudiantes colocan 10 de manera números espaciados entre números en numérica. primero los números espaciados	uniforme. Los estudiantes usan una recta sin ubicar la recta uniformemente.
Booth y Siegler (2008)	1er	52 estudiantes	Los estudiantes reciben una recta numérica que muestra sumandos y sumas para problemas de suma entrenados.192	Los estudiantes resuelven problemas de suma entrenados sin una recta numérica.

pero no usó una recta numérica. Los autores informaron que los estudiantes del grupo de tratamiento tenían más probabilidades que los estudiantes del grupo de control de responder correctamente los mismos problemas de suma más adelante. Además, el estudio señaló que la experiencia con la recta numérica condujo a una mejor calidad de los errores en los problemas de suma (errores que se acercaban más a la respuesta correcta).

El panel también identificó evidencia que muestra una relación entre la precisión de los estudiantes al ubicar números enteros en una recta numérica y el rendimiento general en matemáticas.193 Estos estudios muestran una relación significativa positiva entre la linealidad de las estimaciones de la recta numérica y el rendimiento general en matemáticas de los estudiantes de jardín de infantes. hasta 4to grado, con correlaciones que van desde 0,39 a 0,69. La precisión de las estimaciones de la recta numérica (es decir, qué tan cerca está un número de su posición real) se relacionó positivamente con el rendimiento general en matemáticas; un estudio encontró una relación significativa que oscilaba entre 0,37 y 0,66);194 un estudio adicional encontró resultados positivos pero relaciones no significativas para estudiantes de 1.° y 2.° grado en un experimento y relaciones positivas significativas para estudiantes de 2.° y 4.° grado en otro experimento.195

Rectas numéricas para enseñar conceptos de fracciones. Un estudio que cumplió con los estándares de la WWC examinó el uso de rectas numéricas para comparar la magnitud de decimales.196 Sesenta y un estudiantes de quinto y sexto grados jugaron un juego de computadora en el que ubicaban la posición de un decimal en una recta numérica de 0 a 1. Los estudiantes de los grupos de tratamiento y control completaron 15 problemas durante sesiones que duraron unos 40 minutos. El estudio involucró tres grupos de tratamiento que recibieron intervenciones diseñadas para ayudar a los estudiantes a representar correctamente el problema: el primer grupo de tratamiento recibió un mensaje para que los estudiantes notaran el dígito de las décimas de cada decimal, el segundo grupo usó una recta numérica con el lugar de las décimas marcado , y el tercer grupo recibió las indicaciones y marcó décimas en la recta numérica. Los estudiantes del grupo de control también resolvieron problemas de recta numérica por computadora, pero sin la ayuda de estas intervenciones.

Dado que los estudiantes tanto del grupo de tratamiento como del grupo de control utilizaron rectas numéricas, el estudio no proporciona evidencia causal de si el uso de rectas numéricas mejora la comprensión de los decimales por parte de los estudiantes. Sin embargo, los resultados indican que centrarse en ciertos aspectos de la recta numérica (específicamente, notar y marcar el lugar de las décimas) condujo a mejoras significativas en la capacidad de los estudiantes para ubicar decimales.

en una recta numérica. La combinación de colocar marcas de décimas en las rectas numéricas y alentar a los estudiantes a notarlas y pensar en ellas (grupo de tratamiento 3) mejoró significativamente la capacidad de los estudiantes para ubicar fracciones decimales en una recta numérica en relación con cuando ninguna de las dos estaba presente (tamaño del efecto de 0,57).). Cuando los estudiantes solo recibieron las décimas (grupo de tratamiento 1) o solo escucharon las indicaciones (grupo de tratamiento 2), las intervenciones no tuvieron un efecto significativo. El panel cree que este resultado indica que la combinación de indicaciones y marcas, junto con el uso de la recta numérica, conduce a una mayor comprensión de la magnitud de los decimales.

Una comparación de la comprensión conceptual de los decimales por parte de los estudiantes antes y después de la intervención proporciona evidencia adicional sobre la utilidad de las rectas numéricas. Jugar el juego de recta numérica por computadora condujo a mejoras en el tratamiento y control de la comprensión conceptual de los decimales por parte de los estudiantes, incluida su capacidad para comparar magnitudes relativas de fracciones, identificar fracciones equivalentes y comprender el valor posicional. Esta es una evidencia sugestiva, porque no existe un grupo de comparación de estudiantes que no usaron una recta numérica.

Otro estudio examinó el uso de rectas numéricas en la enseñanza de fracciones, pero no cumplió con los estándares.197 El estudio comparó dos planes de estudio holandeses a lo largo de un año escolar. Un plan de estudios se centró en el uso de rectas numéricas y contextos de medición para enseñar fracciones; el otro plan de estudios utilizaba círculos y representaciones de fracciones parte-todo. Los estudiantes del grupo de tratamiento midieron objetos usando barras de diferentes tamaños y compararon fracciones en una recta numérica. Los autores informaron efectos positivos en 9 a la comprensión de las fracciones por parte de niños de 10 años. Sin embargo, el estudio no cumplió con los estándares, porque solo se asignó al tratamiento un salón de clases de estudiantes. Otro problema al interpretar el estudio fue que el grupo experimental fomentó la interacción de los estudiantes, mientras que los estudiantes del grupo de control principalmente trabajó solo. Como resultado, no fue posible distinguir el efecto de estos enfoques instruccionales del efecto del currículo.

Dos estudios adicionales que no fueron elegibles para revisión encontraron resultados mixtos al usar una recta numérica para enseñar conceptos de fracciones.198 Un estudio examinó el uso de una recta numérica para enseñar la suma de fracciones a una clase de estudiantes de sexto grado. Con base en observaciones en el aula y entrevistas con el maestro y dos estudiantes, los autores encontraron que los estudiantes tenían dificultades para ver las particiones en una recta numérica como unidades fijas, así como también dificultad para asociar fracciones equivalentes con un solo punto en la recta numérica. Las diferencias menores en la forma en que el maestro presentó la recta numérica afectaron si los estudiantes veían las particiones como unidades fijas.

El segundo estudio describió tres pequeños estudios de casos de instrucción de fracciones que utilizaban rectas numéricas para representar y ordenar fracciones.199 En este estudio, los estudiantes de 4º y 5º grado tuvieron problemas para ubicar fracciones en una recta numérica cuando las fracciones estaban en forma reducida y el número La línea estaba organizada por una fracción unitaria más pequeña (por ejemplo, tuvieron dificultades para ubicar 1/3 en una recta numérica dividida en sextos). Sin embargo, los autores también informaron que la enseñanza de la recta numérica mejoró la capacidad de los estudiantes para trabajar con fracciones.

Evidencia adicional. Otros tipos de evidencia también respaldaron la importancia de desarrollar la capacidad de los estudiantes para comprender fracciones en una recta numérica. La capacidad de los estudiantes para ubicar decimales en una recta numérica está relacionada con el rendimiento general en matemáticas. Un estudio de estudiantes alemanes de quinto y sexto grado encontró una correlación positiva significativa entre la habilidad de los estudiantes para estimar la ubicación de los decimales en una recta numérica y sus calificaciones de matemáticas en la escuela.200 Además, el análisis de un matemático indicó que aprender representar toda la gama de números en rectas numéricas es fundamental para comprender los números.201

Recomendación 3.

Ayude a los estudiantes a comprender por qué los procedimientos para cálculos con las fracciones tienen sentido.

Nivel de evidencia: Evidencia moderada

El panel calificó esta recomendación como respaldada por evidencia moderada, basada en estudios específicamente relacionados con el conocimiento conceptual y procedimental de las fracciones. Esta calificación de evidencia se basa en tres ensayos controlados aleatorios que cumplieron con los estándares de la WWC y demostraron la efectividad de enseñar la comprensión conceptual al desarrollar la habilidad computacional de los estudiantes con decimales.202 Las intervenciones que iteraban entre la instrucción sobre conocimiento conceptual y conocimiento procedimental tuvieron un efecto positivo en cálculo decimal.203 Aunque los estudios se centraron en decimales y fueron de escala relativamente pequeña, el panel cree que los tres, junto con la amplia evidencia de que la información significativa se recuerda mucho mejor que la información sin sentido,204 proporcionan evidencia persuasiva para la recomendación.

El respaldo adicional para la recomendación proviene de cuatro estudios correlacionales de estudiantes de 4.°, 5.° y 6.° grado que mostraron relaciones significativas entre el conocimiento conceptual y procedimental de las fracciones.205 Documentos de consenso, como Adding It Up y el Panel Asesor Nacional de Matemáticas informe, también sugieren la importancia de combinar la enseñanza sobre la comprensión conceptual con la fluidez procedimental.206

Los miembros del panel centraron su revisión en estudios que examinaban específicamente intervenciones para desarrollar la comprensión de los estudiantes sobre el cálculo de fracciones. Tres ensayos controlados aleatorios que cumplieron con los estándares de la WWC respaldan la recomendación.207 Dos de los estudios utilizaron intervenciones basadas en computadora para comparar diferentes formas de ordenar la instrucción conceptual y procedimental para estudiantes de sexto grado.208 Los grupos de tratamiento de los estudios alternaron entre lecciones conceptuales. sobre el valor posicional decimal y lecciones de procedimiento sobre suma y resta de decimales; el

Los grupos de control completaron todas las lecciones conceptuales antes de recibir cualquiera de las lecciones de procedimiento. La intervención consistió en seis lecciones, durante las cuales los estudiantes resolvieron problemas planteados mientras recibían retroalimentación del programa de computadora según fuera necesario. Ambos estudios de escala relativamente pequeña encontraron efectos positivos al iterar entre lecciones conceptuales y procedimentales. Uno asignó aleatoriamente a 26 estudiantes y encontró un efecto grande y significativo en el dominio computacional con decimales (tamaño del efecto = 2,38); el otro estudio asignó al azar cuatro aulas y encontró un efecto sustancialmente importante, pero no significativo (tamaño del efecto = 0,63).

El tercer estudio examinó una intervención diseñada para mejorar la comprensión conceptual de los estudiantes sobre cómo ubicar decimales en una recta numérica.209 En él, los estudiantes de quinto y sexto grado practicaron la localización de fracciones en una recta numérica usando un juego de computadora llamado Atrapa al monstruo. Los estudiantes de los grupos de tratamiento recibieron una indicación para que notaran el dígito de las décimas o una recta numérica dividida en décimas, dos intervenciones que el panel considera que fortalecen el conocimiento conceptual de los estudiantes. Los estudiantes de control no recibieron las indicaciones y utilizaron una recta numérica de 0 a 1 sin marcar las décimas. Ambos tratamientos tuvieron un efecto positivo y significativo en la capacidad de los estudiantes para ubicar decimales en una recta numérica sin las indicaciones ni las décimas marcadas. Recibir tanto las indicaciones como la recta numérica con las décimas marcadas tuvo un impacto mayor que recibir las dos intervenciones por separado.

La recomendación del panel también está respaldada por evidencia correlacional que muestra una relación significativa entre el conocimiento conceptual y procedimental de las fracciones de los estudiantes. Hecht et al. (2003) administraron una variedad de evaluaciones a 105 estudiantes de quinto grado, y Hecht (1998) evaluó a 103 estudiantes de séptimo y octavo grado para examinar cómo se relacionan la comprensión conceptual y la habilidad procedimental. Hecht y Vagi (en prensa) incluyeron una muestra de 181 estudiantes de 4º y 5º grado para medir la relación entre el conocimiento conceptual y procedimental. Los estudios midieron tanto conceptual como

Cuadro D.2. Estudios de intervenciones que desarrollaron una comprensión conceptual del cálculo de fracciones que cumplieron con los estándares de la WWC (con o sin reservas)

Citación	Calificación Nivel	Análisis Intervención de tamaño de muestra		Comparación	Resultado	Tamaño del efecto210
Rittle-Johnson y Koedinger (2002)	6to	4 aulas	Los estudiantes completan seis lecciones basadas en computadora sobre cálculo con decimales, alternando entre lecciones conceptuales y de procedimiento.	Los estudiantes completan seis lecciones basadas en computadora sobre cálculo con decimales, completando todas las lecciones conceptuales antes de las lecciones de procedimiento.	Competencia computacional con decimales.	0,63, ns
Rittle-Johnson y Koedinger (2009)	6to	26 estudiantes	Los estudiantes completan seis lecciones basadas en computadora sobre cálculo con decimales, alternando entre lecciones conceptuales y de procedimiento.	Los estudiantes completan seis lecciones basadas en computadora sobre cálculo con decimales, completando todas las lecciones conceptuales antes de las lecciones de procedimiento.	Aritmética decimal	2,83, sig
Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001)	5to y 6to	61 estudiantes	Al ubicar decimales en una recta numérica, los estudiantes reciben un mensaje para notar el dígito de las décimas y usar una recta numérica de 0 a 1 con las décimas marcadas.	Al ubicar decimales en una recta numérica, los estudiantes usaron una recta numérica de 0 a 1 sin las décimas marcadas.	Localizar decimales en una recta numérica	0,57, sig

ns = no significativo
sig = estadísticamente significativo

Conocimiento procedimental de fracciones y cálculo de fracciones. Los tres estudios encontraron que después de controlar otros factores, el conocimiento conceptual de las fracciones predijo significativamente la capacidad de los estudiantes para tener éxito en el cálculo y la estimación de fracciones. Si bien estos estudios muestran una correlación entre el conocimiento conceptual y procedimental, no establecen si las intervenciones para desarrollar el conocimiento conceptual mejoran el conocimiento procedimental.

En otro experimento, Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001)211 encontraron que la comprensión de los decimales (es decir, magnitud relativa y equivalencia) de los estudiantes de quinto grado estaba significativamente relacionada con su capacidad para ubicar decimales en una recta numérica.212 Con Al realizar un trolling de conocimiento procedimental inicial, se encontró que el conocimiento conceptual representaba el 20% de la variación del desempeño en una prueba de conocimiento procedimental.

Manipuladores y representaciones. El panel identificó evidencia que respalda el primer paso de acción, que recomienda el uso de manipuladores y representaciones visuales para enseñar el cálculo de fracciones. Dos ensayos controlados aleatorios, ambas disertaciones inéditas, que cumplieron con los estándares de la WWC encontraron que el uso de objetos manipulables tenía un efecto positivo en el cálculo de fracciones.213
Nishida (2008)214 llevó a cabo un estudio a escala relativamente pequeña sobre el uso de círculos de fracciones para enseñar numeración. relaciones de denominador y otros conceptos de fracciones. El estudio encontró que hacer que los estudiantes usaran círculos de fracciones, en lugar de observar el uso de los profesores, mejoró significativamente la comprensión de los estudiantes de los conceptos de fracciones relevantes para el cálculo (tamaño del efecto = 0,73).
El uso de círculos de fracciones manipulables también tuvo un efecto sustancialmente importante, pero no estadísticamente significativo, en la comprensión de las fracciones, en comparación con el uso de imágenes de círculos de fracc

El segundo estudio encontró que el uso de una variedad de materiales manipulables para complementar el plan de estudios de fracciones de tercer grado mejoraba la comprensión de las fracciones y el cálculo de fracciones por parte de los estudiantes.215 La unidad del estudio incluía lecciones sobre magnitud, equivalencia, suma y resta de fracciones. Los maestros en el estudio usaron muchos de los mismos materiales, pero los maestros en el grupo de tratamiento también emplearon varios manipulativos y modelos, incluyendo cuadrados de fracciones, juegos de fracciones, tiras de fracciones, pizzas, hilanderos de fracciones, cubos, tarjetas cuadriculadas, tiras de papel, juegos virtuales. manipulativos, recortes y formas. El uso de estos manipulativos tuvo un efecto sustancialmente importante, pero no estadísticamente significativo, en la evaluación de un libro de texto sobre el conocimiento y el cálculo de fracciones (tamaño del efecto = 0,60).

Un ensayo controlado aleatorio que potencialmente cumple con los estándares examinó el uso de manipulativos y contextos del mundo real para enseñar fracciones.216 El estudio examinó un plan de estudios desarrollado por el Proyecto de Números Racionales (RNP) que emplea un enfoque múltiple que incorpora manipulativos. , contextos del mundo real y estimación, y se centra en desarrollar el sentido cuantitativo de las fracciones en los estudiantes. Los maestros de estudiantes de quinto y sexto grado fueron asignados aleatoriamente para utilizar el plan de estudios RNP o uno de dos planes de estudio comerciales que incluían un uso mínimo de materiales manipulables (Addison-Wesley Mathematics o Mathematics Plus). El plan de estudios RNP tuvo un efecto positivo significativo en el cálculo y estimación de fracciones (tamaño del efecto = 0,27 y 0,65, respectivamente). Sin embargo, el estudio proporcionó información insuficiente para evaluar el desgaste de la muestra, y la cantidad de uso de materiales manipulables fue solo una de las muchas diferencias entre los planes de estudio, lo que hizo difícil distinguir qué aspectos de la intervención condujeron a resultados positivos.

Contextos del mundo real y comprensión intuitiva. El uso de conceptos del mundo real también puede mejorar la competencia en el cálculo de fracciones (Paso 4). Un ensayo controlado aleatorio que cumplió con los estándares de la WWC indicó que el uso de información de los estudiantes para personalizar las lecciones sobre división de fracciones mejoraron significativamente su capacidad para resolver problemas escritos de división de fracciones.217 Los estudiantes en la condición de tratamiento recibieron instrucción a través de lecciones asistidas por computadora basadas en contextos sugeridos por los estudiantes; A los estudiantes de control se les enseñó usando lecciones abstractas sin tales contextos. El tratamiento se dirigió a estudiantes de quinto y sexto grado durante una unidad de lección única sobre división de fracciones.

Un estudio de diseño cuasiexperimental que potencialmente cumple con los estándares evaluó el impacto de practicar el cálculo de fracciones con problemas establecidos en contextos cotidianos.218 En el transcurso de tres días, los estudiantes del grupo de tratamiento resolvieron problemas contextualizados que involucraban cálculos con decimales. Los problemas incluían referencias a botellas de refrescos, intercambios monetarios y medidas. El grupo de control resolvió problemas similares pero sin referencias contextuales. Según los cálculos del autor, la instrucción mediante problemas contextualizados mejoró significativamente la capacidad de los estudiantes para ordenar y comparar decimales. El estudio contó con una pequeña muestra de 16 niños de 11 y 12 años de Nueva Zelanda; potencialmente cumplió con los estándares porque no existía información suficiente para demostrar que los grupos de tratamiento y control eran equivalentes al inicio.

Recomendación 4.

Desarrollar la comprensión conceptual de los estudiantes sobre las estrategias para resolver problemas de razones, tasas y proporciones antes de exponerlos a la multiplicación cruzada como un procedimiento a utilizar para resolver dichos problemas.

Nivel de evidencia: Evidencia mínima

El panel asignó una calificación de evidencia mínima a esta recomendación. La evidencia de la recomendación general proviene de documentos de consenso que enfatizan la importancia del razonamiento proporcional para el aprendizaje de matemáticas.219 El panel revisó por separado la evidencia de los tres pasos de acción que componen esta recomendación.

Estos pasos de acción están respaldados por estudios de casos que demuestran la variedad de estrategias que usan los estudiantes para resolver problemas de razones, tasas y proporciones; un estudio de manipulativos que cumplían con los estándares de la WWC; y dos estudios que cumplieron con los estándares y enseñaron estrategias para resolver problemas planteados.

Aprovechar las estrategias de desarrollo temprano para resolver problemas de proporcionalidad. La evidencia para el primer paso de acción se basa en estudios de casos que examinan las estrategias de los estudiantes para resolver problemas de proporcionalidad. Ningún estudio cumplió con los estándares ni examinó el efecto del uso de estrategias de desarrollo de los estudiantes para mejorar su comprensión de la proporcionalidad. Sin embargo, el panel cree que los hallazgos de estos estudios de caso proporcionan una base para utilizar una progresión de problemas que se basa en estas estrategias para desarrollar el razonamiento proporcional de los estudiantes.

Una revisión de la literatura sobre el razonamiento proporcional temprano encontró que los estudiantes inicialmente tienden a confiar en estrategias que se acumulan de manera aditiva de una razón a otra.220 Los estudiantes que usan este enfoque pueden no comprender las relaciones multiplicativas entre razones.221 Para ilustrar este punto, se realizó un estudio de caso. de 21 estudiantes de 4.º y 5.º grado describieron cuatro niveles de desarrollo para resolver problemas de proporcionalidad.222 Una diferencia importante entre estos niveles fue si los niveles de desarrollo sólo involucraban la construcción de proporciones más pequeñas a más grandes o si también incluían el conocimiento. que las proporciones, al igual que las fracciones, se pueden reducir.

Carpintero y cols. (1999) y Lamon (1994) sugirieron que tratar las razones como unidades individuales es un paso importante en el desarrollo del razonamiento proporcional. En Cramer, Post y Currier (1993), los estudiantes de octavo grado tenían más probabilidades que los de séptimo grado de resolver problemas de proporcionalidad tratando la razón como una unidad y encontrando una fracción equivalente. Ambos estudios confirman que los estudiantes tienen más dificultades con los problemas de proporcionalidad que involucran relaciones no enteras.223

Utilizar representaciones visuales y manipulativos. Las representaciones visuales y los objetos manipulables concretos pueden aumentar la competencia de los estudiantes para resolver problemas de tasas, razones y proporciones. En un ensayo controlado aleatorio que cumplió con los estándares, Fujimura (2001) evaluó el impacto de proporcionar a los estudiantes manipulativos concretos para resolver problemas de mezclas. Los estudiantes japoneses de cuarto grado recibieron un objeto manipulable para ayudarlos a resolver un problema de proporciones que involucra la mezcla de dos líquidos. Los estudiantes usaron el manipulante para representar visualmente la tasa unitaria o la cantidad de concentrado de naranja por cada unidad de agua. Completar un problema usando el manipulante mejoró la capacidad de los estudiantes para luego resolver el mismo tipo de problemas mixtos sin el manipulante. Los estudiantes en el grupo de tratamiento obtuvieron resultados significativamente mejores que los estudiantes sin exposición a problemas de mezcla durante la intervención (tamaño del efecto = 0,74). El tratamiento tuvo un efecto sustancialmente importante, pero no estadísticamente significativo, en relación con un grupo de control en el que los estudiantes recibieron una hoja de trabajo para calcular la tasa unitaria para resolver problemas de mezcla (tamaño del efecto = 0,34).

Una estrategia de instrucción que enseñó a los estudiantes a usar una tabla de datos para representar información en un problema de proporción de valores faltantes tuvo un efecto positivo significativo en la capacidad de los estudiantes para resolver estos problemas. En un estudio que cumplió con los estándares de la WWC, a los estudiantes de séptimo grado se les enseñó una estrategia de resolución de problemas en la que identificaron el tipo de problema, lo representaron en una tabla, determinaron la relación multiplicativa entre las cantidades conocidas y luego aplicaron esa relación a calcular la cantidad desconocida.224 Los investigadores asignaron al azar cinco aulas para recibir instrucción en la estrategia anterior o en un enfoque sustituto en el que los estudiantes aprendían a reconocer la estructura del problema, resolver el problema sustituyendo cualquier número complejo por números enteros y luego Resuelve el problema con los números complejos. Después de 10 lecciones, los estudiantes del grupo de tratamiento obtuvieron mejores resultados que los del grupo de control en problemas de proporción de valores faltantes.

En otro ensayo controlado aleatorio que cumplió con los estándares, Terwel et al. (2009) investigaron la eficacia de instruir a estudiantes de quinto grado para que resolvieran problemas de porcentaje mediante la construcción de representaciones de manera colaborativa en lugar de utilizar representaciones y gráficos creados por los maestros. Esta intervención tuvo un impacto sustancialmente importante, pero no estadísticamente significativo, en el desempeño de los estudiantes en una prueba posterior de resolución de problemas con porcentajes construida por un investigador (tamaño del efecto = 0,41).

Estrategias para resolver problemas verbales.

La literatura sobre estrategias de enseñanza para problemas planteados incluye muchos estudios fuera del alcance de esta guía: estudios que se centran en estudiantes de noveno grado o superiores, estudiantes de bajo rendimiento y estudiantes con problemas de aprendizaje o en temas distintos de proporción, tasa, o proporción.225 En su revisión de la investigación disponible, el Panel Asesor Nacional de Matemáticas utilizó estos estudios para apoyar la enseñanza de estrategias explícitas para resolver problemas escritos con estudiantes de bajo rendimiento y estudiantes con dificultades de aprendizaje.226 Sin embargo, para esto Como paso de acción, el panel buscó evidencia específicamente relacionada con estudiantes sin discapacidades de aprendizaje diagnosticadas hasta el octavo grado y con problemas planteados de razones, tasas y proporciones.

Dos ensayos controlados aleatorios que cumplieron con los estándares examinaron una estrategia de cuatro pasos para enseñar a los estudiantes a resolver problemas escritos de razones y proporciones.227 La estrategia implicó un enfoque basado en esquemas en el que los estudiantes identifican el tipo de problema, representan información crítica del problema en un diagrama, traducir información a una ecuación matemática y resolver el problema. Los aspectos clave del enfoque, que fue diseñado para abordar las preocupaciones sobre las limitaciones de la instrucción directa, incluyen enseñar a los estudiantes a identificar las estructuras de los problemas subyacentes, por ejemplo a través de diagramas esquemáticos, y comparar y contrastar diferentes estrategias de solución y tipos de problemas. .

Uno de los estudios se centró en estudiantes con problemas de aprendizaje (es decir, 16 de los 19 estudiantes tenían un diagnóstico de problemas de aprendizaje),228 y el otro incluía estudiantes con un rango de habilidades más diverso.229 Xin, Jitendra y Deatline-Buckman (2005) encontraron un efecto positivo significativo (aunque con estudiantes con problemas de aprendizaje) de un enfoque que enseñaba a los estudiantes a identificar el tipo de problema y representarlo. el problema mediante un diagrama.

Los estudiantes del grupo de comparación también aprendieron estrategias para resolver problemas planteados, pero se centraron más en hacer dibujos para representar los problemas. Jitendra et al. (2009) encontraron un efecto sustancialmente importante, pero no estadísticamente significativo, de enseñar la estrategia de cuatro pasos en pruebas de problemas escritos de razones y proporciones desarrolladas por investigadores, en relación con la enseñanza de problemas escritos con un libro de texto de matemáticas adoptado por el distrito (tamaño del efecto = 0,33 y 0,38, postest inmediato y diferido, respectivamente).230

Un tercer ensayo controlado aleatorio, Moore y Carnine (1989), también examinó una estrategia explícita para enseñar a los estudiantes a resolver problemas planteados de razones y proporciones. Este estudio cumplió con los estándares pero está fuera del protocolo de revisión porque incluyó estudiantes de noveno a undécimo grado y se centró en educación especial y estudiantes de bajo rendimiento.

El panel considera que el estudio proporciona evidencia complementaria para respaldar la recomendación. El WWC no tenía suficiente información para calcular los tamaños del efecto, pero los autores del estudio informan que enseñar a los estudiantes reglas explícitas y estrategias de resolución de problemas mejoró significativamente su competencia en la resolución de problemas escritos de proporciones en comparación con los estudiantes a los que se les enseñó usando un plan de estudios básico.

Recomendación 5.
Los programas de desarrollo profesional deberían dar alta prioridad a mejorar la comprensión de los profesores sobre las fracciones y sobre cómo enseñarlas.

Nivel de evidencia: Evidencia mínima

El panel asignó una calificación de evidencia mínima a esta recomendación debido a la evidencia rigurosa limitada sobre los efectos de las actividades de desarrollo profesional relacionadas con las fracciones.

Para evaluar esta recomendación, el panel buscó evidencia de que el desarrollo profesional que se enfoca específicamente en fracciones mejora los resultados de los estudiantes.[231] Dos estudios que se enfocaron en desarrollar el conocimiento de los docentes sobre fracciones cumplieron con los estándares. El desarrollo profesional en el primer estudio abordó los dos primeros pasos de acción para la recomendación y encontró efectos positivos en el aprendizaje de los estudiantes; el segundo estudio abordó los tres pasos de acción, pero no encontró un efecto significativo en la comprensión de las fracciones por parte de los estudiantes.[232] Otros dos estudios cumplieron con los estándares y proporcionaron evidencia para el tercer paso de la recomendación: desarrollar la comprensión de los profesores sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. -ing, pero se centró en la suma de números enteros y el razonamiento algebraico en lugar de en fracciones.[233] Un puñado de otros estudios potencialmente cumplieron con los estándares pero no examinaron fracciones o no brindaron desarrollo profesional directamente relevante para la recomendación.[234]

A pesar de la evidencia limitada sobre los efectos de las actividades de desarrollo profesional en la comprensión de los conceptos y habilidades de fracciones por parte de los docentes, el panel cree que es fundamental desarrollar el conocimiento de los docentes sobre las fracciones y sobre cómo enseñarlas. El conocimiento del contenido matemático de los docentes se correlaciona positivamente con el rendimiento matemático de los estudiantes,[235] y los investigadores han encontrado consistentemente que los docentes en los Estados Unidos carecen de una comprensión conceptual profunda de las fracciones.[236] En conjunto, estos hallazgos sugieren que brindar capacitación profesional El desarrollo de conceptos de fracciones es importante.

Desarrollo profesional relacionado con las fracciones. Un estudio de asignación aleatoria cumplió con los estándares y examinó un programa de desarrollo profesional llamado Evaluación Integrada de Matemáticas (IMA). Este programa abordó la comprensión de los maestros de (1) conceptos de fracciones, (2) cómo los estudiantes aprenden fracciones, (3) la motivación de los estudiantes para el rendimiento en matemáticas y (4) la evaluación.[237] Los maestros aprendieron sobre conceptos de fracciones a través de actividades y ejercicios que Había versiones más complejas de aquellas para estudiantes. Para comprender el pensamiento de los estudiantes, los maestros examinaron el trabajo de los estudiantes y los videos de los estudiantes resolviendo problemas y exploraron las dificultades de los estudiantes para aprender fracciones. La formación de IMA consistió en un instituto de verano de cinco días y 13 sesiones de seguimiento para profesores de primaria superior. Los maestros asignados al programa de desarrollo profesional de IMA lograron una mejora significativa en la comprensión conceptual de las fracciones de sus estudiantes, en comparación con los maestros del grupo de apoyo docente, que se reunieron nueve veces para reflexionar sobre sus prácticas de instrucción. La capacitación IMA tuvo un efecto sustancialmente importante, pero no estadísticamente significativo, en la capacidad de los estudiantes para calcular con fracciones.

Un estudio más reciente sobre desarrollo profesional relacionado con fracciones también cumplió con los estándares de la WWC, pero no encontró un efecto significativo en el aprendizaje de los conceptos de fracciones por parte de los estudiantes.[238] El estudio examinó dos programas de desarrollo profesional para maestros de séptimo grado en 12 distritos de todo el mundo. el país. Los maestros de las escuelas de tratamiento fueron elegibles para aproximadamente 68 horas de capacitación a través de un instituto de verano de tres días y cinco seminarios de un día combinados con visitas de capacitación en la escuela de dos días. El desarrollo profesional se centró en habilidades conceptuales y procedimentales en temas de números racionales, así como conocimientos matemáticos para la enseñanza. Esto incluyó identificar los aspectos clave de la comprensión matemática, reconocer errores comunes cometidos por los estudiantes y seleccionar representaciones para enseñar fracciones. Las actividades incluyeron resolver problemas de matemáticas y recibir comentarios sobre sus soluciones, discutir conceptos erróneos comunes de los estudiantes y planificar lecciones. Los maestros de las escuelas de control recibieron el desarrollo profesional existente proporcionado por el distrito. Sin embargo, el desarrollo profesional no tuvo un impacto significativo en la comprensión de los estudiantes sobre fracciones, decimales, porcentajes o proporciones.

Desarrollo profesional relacionado con otros temas de matemáticas. Al encontrar poca evidencia relacionada específicamente con las fracciones, el panel amplió su revisión para incluir el desarrollo profesional que se centró en otras temas de matemáticas. Dos estudios adicionales cumplieron con los estándares e implementaron capacitación relevante para el tercer paso de acción de la recomendación: desarrollar la comprensión de los docentes sobre el pensamiento matemático de los estudiantes.239

Un estudio examinó un taller de verano de cuatro semanas (20 horas) destinado a desarrollar el conocimiento de los maestros sobre cómo los niños aprenden conceptos de suma y resta de números enteros.240 Los maestros que participaron en el programa, llamado Instrucción Guiada Cognitivamente (CGI, por sus siglas en inglés), aprendieron sobre las habilidades de los niños. estrategias de solución y cómo clasificar tipos de problemas, discutieron cómo incorporar información del taller CGI en el aula y planificaron la instrucción en consecuencia. Comparado con un grupo de control de profesores que recibieron cuatro horas de talleres sobre resolución de problemas y el uso de problemas no rutinarios, el programa CGI tuvo un efecto sustancialmente importante, pero no estadísticamente significativo, en los problemas de cálculo y en los problemas escritos de suma y resta. Las diferentes cantidades de tiempo que los profesores dedicaron a las dos condiciones también limitaron la interpretación de los hallazgos.

El segundo estudio, un ensayo controlado aleatorio realizado en un gran distrito urbano con profesores de 1.º a 5.º grado, también examinó un programa de desarrollo profesional centrado en desarrollar la comprensión de los profesores sobre el pensamiento matemático de los estudiantes.241 Enfatizando la comprensión del signo igual y utilizando relaciones numéricas para simplificar los cálculos, la capacitación en este estudio fue diseñada para mejorar la capacidad de los profesores para incorporar el razonamiento algebraico en las matemáticas elementales. Los profesores aprendieron a dar sentido a las estrategias de los estudiantes para resolver problemas, a vincular el pensamiento de los estudiantes con ideas matemáticas clave y a dirigir conversaciones matemáticas con los estudiantes.

El programa incluyó una reunión inicial y ocho reuniones mensuales de grupos de trabajo después de la escuela (un total de aproximadamente 16,5 horas), así como un capacitador que pasó medio día a la semana en cada escuela para brindar apoyo adicional. Los resultados del estudio mostraron que este desarrollo profesional mejoró significativamente la comprensión de los estudiantes sobre el signo igual y el uso de estrategias de pensamiento relacional para resolver cálculos, pero no para resolver ecuaciones (es decir, con letras que representan cantidades desconocidas).

Evidencia adicional. Hay más evidencia de que el rendimiento de los estudiantes está relacionado positivamente con el conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza; por ejemplo, su habilidad para explicar conceptos matemáticos, comprender las estrategias de los estudiantes y proporcionar representaciones. Un estudio de 699 profesores de matemáticas de 1.º y 3.º grado encontró una relación positiva entre el conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza y los avances en el aprendizaje de los estudiantes en matemáticas después de controlar las características de los estudiantes y los maestros.242 Aunque este estudio no se centró específicamente en las fracciones, demostró la importancia del conocimiento del contenido matemático de los profesores para la enseñar

El desarrollo profesional con fracciones es necesario porque muchos profesores estadounidenses carecen de una comprensión conceptual profunda de las fracciones.243 Un estudio que comparó profesores chinos y estadounidenses encontró que sólo 9 de los 21 profesores estadounidenses que intentaron calcular 13/4 ÷ 1/2 lo hicieron correctamente. mientras que los 72 profesores chinos completaron correctamente el problema.244 profesores estadounidenses no podían representar ni explicar la división con fracciones, y muchos confundieron el algoritmo para dividir fracciones con los algoritmos para sumar, restar y multiplicar fracciones.

Otros estudios han informado hallazgos similares. Un estudio de 218 maestros de escuelas primarias en Minnesota e Illinois encontró que muchos maestros no podían resolver problemas de cálculo que involucraban fracciones y que la mayoría de los que resolvían problemas correctamente no podían dar una explicación correcta de sus soluciones.245 Por ejemplo, casi la mitad de los maestros en el estudio de Minnesota resolvieron incorrectamente un problema de resta que involucraba fracciones (1/3 – 3/7). Además, un estudio de 46 profesores de secundaria de una universidad de Texas encontró que la mayoría de los profesores conocían el procedimiento para dividir con fracciones, pero no lo sabían.

No entendía por qué el procedimiento funcionaba y no podía juzgar si un procedimiento alternativo para resolver un problema de división con fracciones era correcto.246

Estos estudios indican claramente que es necesario mejorar la comprensión de las fracciones por parte de los profesores.

actualizado. Sin embargo, la recomendación sobre el desarrollo profesional se basa en gran medida en la experiencia del panel, debido a la evidencia limitada sobre los efectos de las actividades de desarrollo profesional enfocadas en las fracciones.

Apéndice E

Heurística de evidencia

Este apéndice contiene una heurística para categorizar la base de evidencia para las recomendaciones de las guías de práctica como evidencia sólida, evidencia moderada o evidencia mínima. Esta heurística pretende servir como marco para garantizar que los niveles de evidencia se apliquen de manera consistente en todas las guías de práctica y, al mismo tiempo, aclarar los niveles para los panelistas y educadores. El documento central que acompaña a esta heurística es el "Niveles de evidencia para guías de práctica del Instituto de Ciencias de la Educación" (Tabla 1 en esta guía de práctica).

Tabla E.1. Heurística de evidencia

Criterios para una base de evidencia sólida Alta	Este criterio es necesario para un nivel sólido de evidencia.
validez interna (diseños causales de alta calidad). Los estudios deben cumplir con los estándares de la WWC con o sin reservas.[247]	
Alta validez externa (requiere una cantidad de estudios con diseños causales de alta calidad). Los estudios deben cumplir con los estándares de la WWC con o sin reservas.[248]	
Efectos sobre resultados relevantes: efectos positivos consistentes sin evidencia contradictoria (es decir, sin efectos negativos estadísticamente significativos) en estudios con alta validez interna.[249] Relevancia	
directa al alcance (es decir, validez ecológica) —contexto relevante (por ejemplo, aula vs. laboratorio), muestra (p. ej., edad y características) y resultados evaluados.	
Prueba directa de la recomendación en los estudios, o la recomendación es un componente importante de la intervención probada en los estudios.	
Para las evaluaciones, cumple con los Estándares para pruebas educativas y psicológicas.	
El Panel tiene un alto grado de confianza en que esta práctica es efectiva.	
Criterios para una base de evidencia moderada	**Este criterio es necesario para un nivel moderado de evidencia.**
Validez interna alta pero validez externa moderada (es decir, estudios que respaldan conclusiones causales sólidas, pero la generalización es incierta) O estudios con validez externa alta pero validez interna moderada (es decir, estudios que respaldan la generalidad de una relación, pero la causalidad es incierto). •La investigación puede incluir estudios que generalmente cumplan con los estándares de la WWC y respalden la efectividad de un programa, práctica o enfoque con tamaños de muestra pequeños y/u otras condiciones de implementación o análisis que limiten la generalización. •La investigación puede incluir estudios que respalden la generalidad de una relación pero que no cumplan con WWC. normas;[250] sin embargo, no tienen fallas importantes relacionadas con la validez interna, aparte de la falta de equivalencia demostrada en la prueba previa para estudios de diseño cuasiexperimentales (QED). Los QED sin equivalencia deben incluir una covariable pretest como control estadístico del sesgo de selección. Estos estudios deben ir acompañados de al menos un estudio relevante que cumpla con los estándares WWC.	
Efectos sobre resultados relevantes: preponderancia de evidencia de efectos positivos. El panel debe discutir la evidencia contradictoria (es decir, efectos negativos estadísticamente significativos) y considerarla con respecto a su relevancia para el alcance de la guía y la intensidad de la recomendación como componente de la intervención evaluada.	
La relevancia del alcance (es decir, validez ecológica) puede variar, incluido el contexto relevante (p. ej., aula versus laboratorio), muestra (p. ej., edad y características) y resultados evaluados.	
La intensidad de la recomendación como componente de las intervenciones evaluadas en los estudios puede variar.	
Para las evaluaciones, evidencia de confiabilidad que cumple con los Estándares para Pruebas Educativas y Psicológicas pero con evidencia de validez de muestras que no son adecuadamente representativas de la población en la que se centra la recomendación.	
El panel no es concluyente sobre si la investigación ha controlado efectivamente otras explicaciones o si la práctica sería efectiva en la mayoría o en todos los contextos.	
El panel determina que la investigación no alcanza el nivel de evidencia sólida pero es más convincente que un nivel mínimo de evidencia.	

(continuado)

Tabla E.1. Heurística de evidencia (continuación)

Criterios para una base de evidencia mínima	Este criterio es necesario para un nivel mínimo de evidencia.
Opinión de expertos basada en interpretaciones defendibles de la teoría (o teorías). En algunos casos, esto simplemente significa que las prácticas recomendadas serían difíciles de estudiar de manera rigurosa y experimental. moda mental; en otros casos, significa que los investigadores aún no han estudiado esta práctica.	
Opinión de expertos basada en extrapolaciones razonables de la investigación: •La investigación puede incluir evidencia de estudios que no cumplen con los t el critico eria para modernocomió o evidencia sólida (p. ej., estudios de casos, investigación cualitativa). •La investigación puede estar fuera del alcance de la guía práctica. •La investigación podrá incluir estudios en los que la intensidad del reco mmm nación como compañero mpo El rendimiento de las intervenciones evaluadas en los estudios es bajo.	
Puede haber evidencia débil o contradictoria.	
En opinión del panel, la recomendación debe abordarse como parte de la guía práctica; cómo Sin embargo, el panel no puede señalar un conjunto de investigaciones que alcance el nivel de moderado o fuerte.	

Notas finalesa

1. Para obtener más información, consulte la página de preguntas frecuentes de WWC para obtener guías prácticas, http://ies.ed.gov/ncee/wwc/references/idocviewer/doc.aspx?docid=15 .
2. Consulte las pautas de la WWC en http://ies.ed.gov/ncee/wwc/pdf/wwc_procedures_v2_standards_handbook.pdf .
3. Esto incluye ensayos controlados aleatorios (RCT), diseños cuasiexperimentales (QED), diseños de regresión discontinua (RDD) y diseños de caso único (SCD) evaluados con los estándares WWC.
4. Si la única evidencia que cumple con los estándares (con o sin reservas) son los SCD, se aplicarán las pautas establecidas por el panel de estándares SCD. Para la validez externa, los requisitos son un mínimo de cinco artículos de investigación de SCD que examinen la intervención que cumplan con los estándares de evidencia o cumplan con los estándares de evidencia con reservas, los estudios deben ser realizados por al menos tres equipos de investigación diferentes en tres ubicaciones geográficas diferentes. ciones, y el número combinado de experimentos entre estudios totaliza al menos 20.
5. En determinadas circunstancias (por ejemplo, no se puede formar un grupo de comparación), el panel puede basar una calificación moderada en múltiples diseños correlacionales con fuertes controles estadísticos para el sesgo de selección que demuestren efectos positivos consistentes sin evidencia contradictoria.
6. Baldi et al. (2007); González et al. (2009).
7. Academia Nacional de Ciencias (2007).
8. McCloskey (2007); Academia Nacional de Ciencias (2007); Rivera-Batiz (1992).
9. Starkey, Klein y Wakeley (2004).
10. Rivera-Batiz (1992).
11. Mullis et al. (1997).
12. Panel Asesor Nacional de Matemáticas (2008).
13. Hoffer et al. (2007).
14. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (2007).
15. Kloosterman (2010).
16. Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001).
17. Vamvakoussi y Vosniadou (2004).
18. Davis y Pepper (1992); Frydman y Bryant (1988); Caza y Sharpley (1988); Pimienta (1991); Singer-Freeman y Goswami (2001); Spinillo y Bryant (1991, 1999).
19. Ma (1999).
20. Ma (1999); Moseley, Okamoto e Ishida (2007).
21. Davis y Pepper (1992); Frydman y Bryant (1988); Caza y Sharpley (1988); Pimienta (1991).
22. Singer-Freeman y Goswami (2001); Spinillo y Bryant (1991, 1999).
23. Davis y Pepper (1992); Frydman y Bryant (1988); Caza y Sharpley (1988); Pimienta (1991); Singer-Freeman y Goswami (2001); Spinillo y Bryant (1991, 1999).
24. Empson (1999); Streefland (1991).
25. Davis y Pepper (1992); Frydman y Bryant (1988); Caza y Sharpley (1988); Pimienta (1991).
26. Chen (1999); Caza y Sharpley (1988).
27. Empson (1999); Streefland (1991).
28. Singer-Freeman y Goswami (2001); Spinillo y Bryant (1991, 1999).
29. Spinillo y Bryant (1991, 1999).
30. Goswami (1989, 1995).
31. Empson (1999); Streefland (1991).
32. Empson (1999).
33. Los profesores también deben tener en cuenta que compartir situaciones con más personas que objetos da como resultado fracciones propias, mientras que compartir situaciones con más objetos que personas da como resultado fracciones impropias o números mixtos.
34. Empson (1999); Streefland (1991).
35. Empson (1999).
36. Pothier y Sawada (1990).
37. Ibídem.
38. Empson (1999); Streefland (1991).
39. Ibídem.
40. Streefland (1991).
41. Ibíd.
42. Resnick y Singer (1993).
43. Ibídem.
44 Warren y Cooper (2007).
45. Ibídem.

a Los estudios elegibles que cumplen con los estándares de evidencia del WWC o que cumplen con los estándares de evidencia con reservas se indican en negrita en las notas finales y en las páginas de referencias. Para obtener más información sobre estos estudios, consulte el Apéndice D.

46. Davis y Pitkethly (1990).
47.Frydman y Bryant (1988).
48.Ibíd.
49.Mack (1993).
50.Sophian (2007).
51. Booth y Siegler (2008); Ramani y Siegler (2008); Siegler y Booth (2004); Siegler y Ramani (2008, 2009).
52. Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001).
53.Booth y Siegler (2006, 2008); Schneider, Grabner y Paetsch (2009); Siegler y stand (2004).
54. Ramani y Siegler (2008); Siegler y Ramani (2008, 2009).
55. Siegler y Booth (2004).
56. Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001).
57.Keijzer y Terwel (2003).
58.Ibíd.
59. Bright et al. (1988); Izsak, Tillema y Tunc-Pekkan (2008).
60. Bright et al. (1988).
61.Schneider, Grabner y Paetsch (2009).
62.Wu (2002).
63.Sophian (2007).
64.Izsak, Tillema y Tunc-Pekkan (2008); Yanik, Helding y Flores (2008).
65.Adaptado de Beckmann (2008); Wu (2002).
66.Beckmann (2008); Lamón (2005).
67.Van de Walle, Karp y Bay-Williams (2010).
68 Bright et al. (1988); Izsak (2008).
69.Ni y Zhou (2005).
70.Lamon (2005); Niemi (1996).
71.Ni y Zhou (2005).
72. Bright et al. (1988).
73. Rittle-Johnson y Koedinger (2002, 2009); Rittle-Johnson, Siegler y Ali-bali (2001).
74.Anderson (2004); Schneider y Pressley (1997).
75.Hecht (1998); Hecht, Close y Santisi (2003); Hecht y Vagi (en prensa); Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001).
76. Rittle-Johnson y Koedinger (2002, 2009).
77. Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001), Experimento 2.
78.Hecht (1998); Hecht, Close y Santisi (2003); Hecht y Vagi (en prensa).
79.Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001), Experimento 1.
80.Hudson Hawkins (2008); Nishida (2008).
81. Nishida (2008), Experimento 2.
82.Hudson Hawkins (2008).
83. Cramer, Post y del Mas (2002).
84. Anand y Ross (1987); Irwin (2001).
85. Anand y Ross (1987).
86.Irwin (2001).
87Mack (2000); Mack (2001); Rittle-Johnson y Koedinger (2005).
88.Cramer y Wyberg (2009).
89.Sowder et al. (1998).
90.Búlgaro (2009).
91.Van de Walle, Karp y Bay-Williams (2010).
92 Smith (2002).
93.Hecht (1998).
94.Johanning (2006).
95 Smith (2002).
96.Gerver y Sgroi (1989).
97.Cramer y Wyberg (2009); Cramer, Wyberg y Leavitt (2008); Hecht (2003).
98.Kerslake (1986); Mack (1995); Pintor (1989).
99.Afilado (2004).
100.Tatsuoka y Tatsuoka (1983).
101.Hackenberg (2007).
102.Mack (1995).
103.Pintor (1989).
104.Ashlock (2009); Barash y Klein (1996).
105. Kamii y Warrington (1995); Mack (2001); Warrington y Kamii (1998).
106 Mack (1990, 1993).
107. Anand y Ross (1987); Irwin (2001).
108.Mack (1990).
109. Ibíd.
110.Cramer, Wyberg y Leavitt (2008).

111.Lesh, Post y Behr (1988); Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (2000); Panel Asesor Nacional de Matemáticas (2008).

112.Smith (2002); Tallo (2008).

113. Panel Asesor Nacional de Matemáticas (2008).

114.Kloosterman (2010); Lamón (2007); Thomp-son y Saldanha (2003).

115.Lesh, Post y Behr (1988); Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (2000); Panel Asesor Nacional de Matemáticas (2008).

116. Carpenter et al. (1999); Cramer, Post y del Mas (2002); Lamón (1994).

117. Fujimura (2001).

118. Sellke, Behr y Voelker (1991).

119. Terwel et al. (2009).

120. Jitendra et al. (2009); Xin, Jitendra y Deatline-Buchman (2005).

121.El estudio realizado en su mayoría con estudiantes con dificultades de aprendizaje se ajusta al protocolo del grupo porque algunos de los estudiantes tienen un bajo rendimiento pero no tienen dificultades de aprendizaje. El protocolo incluye estudios que no se centraron únicamente en estudiantes con discapacidades de aprendizaje.

122. Este paso se centra principalmente en estrategias para resolver dos tipos de problemas de proporción (Lamon, 2005): (1) problemas con valores faltantes en los que a los estudiantes se les da una razón completa y otra razón con un valor faltante que los estudiantes deben identificar, y (2) problemas de comparación en los que los estudiantes determinan si dos razones son equivalentes.

123. Carpenter et al. (1999); Cramer, Post y Currier (1993); Lesh, Post y Behr (1988).

124. Carpenter et al. (1999).

125.Ibíd.

126. Carpenter et al. (1999); Lamón (2007).

127. Kent, Arnosky y McMonagle (2002); Ter-wel et al. (2009).

128. Resnick y Singer (1993).

129.Lamon (1993).

130. Jitendra et al. (2009).

131. Xin, Jitendra y Deatline-Buchman (2005).

132. Hembree (1992); Jitendra et al. (2009).

133. Jitendra et al. (2009); Xin, Jitendra y Deatline-Buchman (2005).

134. Bottge (1999); Heller et al. (1989).

135.Li y Kulm (2008); Mamá (1999); Newton (2008); Publicar y col. (1988).

136.Hill, Rowan y Ball (2005).

137.Li y Kulm (2008); Mamá (1999); Newton (2008); Publicar y col. (1988).

138. Sajonia, Gearhart y Nasir (2001).

139. Garet et al. (2010).

140. Garet et al. (2010); Mamá (1999); Publicar y col. (1988).

141.Ma (1999).

142. Post et al. (1988).

143. Hill et al. (2005).

144.Ma (1999).

145.Li y Kulm (2008).

146.Aunque una discusión completa sobre cómo estructurar el desarrollo profesional está más allá del alcance de esta guía, el panel ofrece sugerencias básicas que abordan el objetivo de este paso.

147. Marchiondra (2006); Saxe, Gearhart y Nasur (2001).

148.Tirosh (2000).

149. Saxe, Gearhart y Nasir (2001); Wu (2004).

150. Saxe, Gearhart y Nasir (2001).

151. Carpintero y cols. (1989).

152. Jacobs y otros. (2007); Saxe, Gearhart y Nasir (2001).

153.Kloosterman (2010); Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (2007).

154.Mullis et al. (1997).

155.Consejo Nacional de Investigaciones (2001).

156.Sophian y Wood (2007).

157. Cramer y Post (1993); Van de Walle, Karp y Bay-Williams (2010).

158. Davis y Pepper (1992); Frydman y Bryant (1988); Caza y Sharpley (1988); Pimienta (1991); Singer-Freeman y Goswami (2001); Spinillo y Bryant (1991, 1999).

159.Empson (1999); Streefland (1991).

160. Chen (1999); Davis y Pepper (1992); Frydman y Bryant (1988); Caza y Sharpley (1988); Pimienta (1991).

161. Chen (1999).

162.Hunting y Sharpley (1988).

163.Sophian, Garyantes y Chang (1997).

164.Ibíd.

165.Empson (1999); Streefland (1991).
166. Streefland (1991).
167.Empson (1999).
168.Singer-Freeman y Goswami (2001); Spinillo y Bryant (1991, 1999).
169.Singer-Freeman y Goswami (2001).
170. Spinillo y Bryant (1991).
171. Spinillo y Bryant (1991, 1999).
172.Boyer, Levine y Huttenlocher (2008); Singer-Freeman y Goswami (2001); Spinillo y Bryant (1999).

173. Goswami (1989).
174.Goswami (1995).
175. Spinillo (1995).
176. Ramani y Siegler (2008); Siegler y Ramani (2008, 2009).
177. Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001).

178 Booth y Siegler (2006, 2008); Siegler y Booth (2004); Siegler y Ramani (2009).
179. Opfer y DeVries (2008).
180. Ramani y Siegler (2008); Siegler y Ramani (2008, 2009).
181. Ramani y Siegler (2008); Siegler y Ramani (2008).
182. Siegler y Ramani (2009).
183. Ramani y Siegler (2008); Siegler y Ramani (2008, 2009). El WWC calculó el tamaño del efecto para Siegler y Ramani (2008); Los tamaños del efecto informados por Ramani y Siegler (2008) y Siegler y Ramani (2009) fueron informados por los autores (los autores no proporcionaron información suficiente para que el WWC calculara el tamaño del efecto).
184. Siegler y Ramani (2008); Ramani y Siegler (2008). Siegler y Ramani (2009) encontraron un efecto significativo del juego de mesa de números sobre el porcentaje de error absoluto, pero no informaron el tamaño del efecto ni proporcionaron información suficiente para calcularlo.
185. Siegler y Ramani (2008, 2009).
186. Siegler y Booth (2004).
187. Los autores no informaron si la diferencia entre los grupos de tratamiento y control fue significativa.

188. Siguiendo las directrices del WWC, la mejora de los resultados se indica mediante un efecto positivo estadísticamente significativo o un efecto positivo. tamaño del efecto sustancialmente importante. En esta guía, el panel analiza hallazgos sustancialmente importantes como aquellos que contribuyen a la evidencia de la efectividad de las prácticas, incluso cuando esos efectos no son estadísticamente significativos. Consulte las pautas de la WWC en http://ies.ed.gov/ncee/wwc/pdf/wwc_procedures_v2_standards_handbook.pdf .
189. Booth y Siegler (2008).
190. Este estudio también incluyó un tratamiento de juego de mesa numérico circular que no se consideró como parte de la evidencia para esta recomendación.

191.Este estudio también incluyó a estudiantes de jardín de infantes, pero los autores centraron los resultados de su análisis en los niños de 1º y 2º grado, ya que el tratamiento no tuvo el efecto esperado en los niños de jardín de infantes.
192.Este estudio también incluyó un grupo de tratamiento en el que los estudiantes generaron una recta numérica con los sumandos y las sumas (en lugar de proporcionarles una recta generada por computadora). Estos dos tratamientos no difirieron significativamente en el porcentaje de respuestas correctas.
193. Booth y Siegler (2006); Siegler y Booth (2004).

194. Siegler y Booth (2004).
195 Booth y Siegler (2006).
196. Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001).

197. Keijzer y Terwel (2003).
198. Bright et al. (1988); Izsak, Tillema y Tunc-Pekkan (2008).
199. Bright et al. (1988).
200. Schneider, Grabner y Paetsch (2009).
201.Wu (2002).
202. Rittle-Johnson y Koedinger (2002, 2009); Rittle-Johnson, Siegler y Ali-bali (2001).

203. Rittle-Johnson y Koedinger (2002, 2009).

204.Anderson (2004); Schneider y Pressley (1997).

205.Hecht (1998); Hecht, Close y Santisi (2003); Hecht y Vagi (en prensa); Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001).
206. Panel Asesor Nacional de Matemáticas (2008); Consejo Nacional de Investigaciones (2001).

207. Rittle-Johnson y Koedinger (2002, 2009); Rittle-Johnson, Siegler y Ali-bali (2001).

208. Rittle-Johnson y Koedinger (2002, 2009).

209. Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001), Experimento 2.

210. Para un valor $p < 0,05$, el tamaño del efecto es significativo (sig); para un valor de $p \geq 0,05$, el tamaño del efecto no es significativo (ns).

211. Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001), Experimento 1.

212. Ibídem.

213. Hudson Hawkins (2008); Nishida (2008).

214. Nishida (2008), Experimento 2.

215. Hudson Hawkins (2008).

216. Cramer, Post y del Mas (2002).

217. Anand y Ross (1987).

218. Irwin (2001).

219. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (2000); Panel Asesor Nacional de Matemáticas (2008).

220. Resnick y Singer (1993).

221. Lamon (1994).

222. Carpenter et al. (1999).

223. Carpenter et al. (1999); Cramer, Post y Currier (1993).

224. Sellke, Behr y Voelker (1991).

225. Bassok (1990); Carroll (1994); Cooper y Sweller (1987); Luis (1989); Lewis y Mayer (1987); Reed y Bolstad (1991); Hinchazón y Cooper (1985).

226. Panel Asesor Nacional de Matemáticas (2008).

227. Jitendra et al. (2009); Xin, Jitendra y Deatline-Buchman (2005).

228. Xin, Jitendra y Deatline-Buchman (2005).

229. Jitendra et al. (2009).

230. Jitendra et al. (2009) informaron un efecto positivo significativo del tratamiento en la prueba posterior a la resolución de problemas. Sin embargo, cuando el WWC aplicó una corrección de agrupamiento, dado que los estudiantes del estudio estaban agrupados en las aulas, los resultados no fueron significativos. Para obtener una explicación, consulte el Tutorial de WWC sobre discrepancias. Para las fórmulas que la WWC utilizó para calcular el valor estadístico importancia, consulte el Manual de estándares y procedimientos de WWC.

231. El panel no revisó estudios que midieran el efecto del desarrollo profesional en el conocimiento de los docentes, aunque una revisión realizada por el Panel Asesor Nacional de Matemáticas no identificó ningún estudio con un diseño de grupo de comparación.

232. Garet et al. (2010); Saxe, Gearhart y Nasir (2001).

233. Carpintero y cols. (1989); Jacobs y cols. (2007).

234. Cole (1992); Meyer y Sutton (2006); Niess (2005); Ross, Hogaboam-Gray y Bruce (2006); Sloan (1993).

235. Hill, Rowan y Ball (2005).

236. Li y Kulm (2008); Mamá (1999); Newton (2008); Publicar y col. (1988).

237. Saxe, Gearhart y Nasir (2001). Aunque el estudio también utilizó un diseño cuasiexperimental para comparar dos planes de estudios de matemáticas, sólo la parte de desarrollo profesional de este estudio, que utilizó un diseño de asignación aleatoria, es relevante para la Recomendación 5.

238. Garet et al. (2010).

239. Carpenter y otros. (1989); Jacobs y cols. (2007).

240. Carpintero y cols. (1989).

241. Jacobs y otros. (2007).

242. Hill, Rowan y Ball (2005).

243. Li y Kulm (2008); Mamá (1999); Publicar y col. (1988).

244. Ma (1999).

245. Post y otros. (1988).

246. Li y Kulm (2008).

247. Esto incluye ensayos de control aleatorios (RCT), diseños cuasiexperimentales (QED), diseños de regresión discontinua (RDD) y diseños de caso único (SCD) evaluados con estándares WWC.

248. Si la única evidencia que cumple con los estándares (con o sin reservas) son los SCD, se aplicarán las pautas establecidas por el panel de estándares SCD. Para la validez externa, los requisitos son un mínimo de cinco trabajos de investigación de SCD que examinen la intervención y que cumplan con los estándares de evidencia o cumplan con los estándares de evidencia con reservas, los estudios deben ser realizados por

al menos tres equipos de investigación diferentes en tres ubicaciones geográficas diferentes, y el número combinado de experimentos en todos los estudios asciende al menos a 20.

249. Al evaluar si los efectos son consistentes o contradictorios, considere las propiedades psicométricas de las evaluaciones. Por ejemplo, es menos probable que se detecten efectos si una evaluación no es confiable. Las propiedades psicométricas a considerar incluyen la confiabilidad, la presencia de varianza limitada o restringida, el límite máximo de la evaluación. y piso, los gradientes de ítems de la evaluación, si la evaluación estuvo demasiado alineada con la intervención y la idoneidad de la evaluación para la muestra a la que se aplicó.

250. En determinadas circunstancias (por ejemplo, no se puede formar un grupo de comparación), el panel puede basar una calificación moderada en múltiples diseños correlacionales con fuertes controles estadísticos para el sesgo de selección que demuestren efectos positivos consistentes sin evidencia contradictori

Referencias

Asociación Estadounidense de Investigación Educativa, Asociación Estadounidense de Psicología y Consejo Nacional de Medición en Educación. (1999). Los estándares para las pruebas educativas y psicológicas. Washington, DC: Publicaciones de la Asociación Estadounidense de Investigación Educativa.

Asociacion Americana de Psicologia. (2002). Criterios para el desarrollo y evaluación de guías prácticas. Psicólogo estadounidense, 57(12), 1048–1051.

Anand, PG y Ross, SM (1987). Uso de instrucción asistida por computadora para personalizar materiales aritméticos para niños de escuela primaria. Revista de Psicología Educativa, 79(1), 72–78.

Anderson, JR (2004). Psicología cognitiva y sus implicaciones (6ª ed.). Nueva York: Worth Publishers.

Ashlock, R. (enero de 2009). Patrones de error en Computación: uso de patrones de error para mejorar la instrucción. Boston, MA: Allyn y Bacon.

Baldi, S., Jin, Y., Skemer, M., Green, PJ y Her-get, D. (2007). Aspectos destacados de PISA 2006: Desempeño de estudiantes estadounidenses de 15 años en competencias científicas y matemáticas en un contexto internacional (NCES 2008–016). Washington, DC: Centro Nacional de Estadísticas Educativas, Instituto de Ciencias de la Educación, Departamento de Educación de Estados Unidos.

Barash, A. y Klein, R. (1996). Conocimiento algorítmico, intuitivo y formal de los estudiantes de séptimo grado sobre la multiplicación y división de números racionales no negativos. En Puig, L. y Gutiérrez, A. (Eds.), Actas de la vigésima conferencia del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática, Volumen 2 (págs. 35–42). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Bassok, M. (1990). Transferencia de procedimientos de resolución de problemas específicos del dominio. Revista de psicología experimental: aprendizaje, memoria y cognición, 16, 522–533.

Beckmann, S. (2008). Matemáticas para profesores de primaria y actividades (2ª ed.). Boston: Addison Wesley.

Stand, JL y Siegler, RS (2006). Diferencias individuales y de desarrollo en la estimación numérica pura. Psicología del desarrollo, 42 (1), 189–201.

Stand, JL y Siegler, RS (2008). Las representaciones de magnitudes numéricas influyen en el aprendizaje aritmético. Desarrollo infantil, 79(4), 1016–1031.

Bottge, BA (1999). Efectos de la instrucción matemática contextualizada en la resolución de problemas de estudiantes con rendimiento promedio y por debajo del promedio. La Revista de Educación Especial, 33(2), 81–92.

Boyer, TW, Levine, SC y Huttenlocher, J. (2008). Desarrollo del razonamiento proporcional: dónde se equivocan los niños pequeños. Psicología del desarrollo, 44 (5), 1478-1490.

Bright, G., Behr, M., Post, T. y Wachsmuth, Yo (1988). Identificar fracciones en rectas numéricas. Revista de investigación en educación matemática, 19 (3), 215–232.

Búlgaro, S. (2009). Un estudio longitudinal de Representaciones de los estudiantes para la división de fracciones. Entusiasta de las matemáticas de Montana, 6(1), 165–200.

Carpenter, TP, Fennema, E., Peterson, PL, Chiang, CP y Loef, M. (1989). Uso del conocimiento del pensamiento matemático de los niños en la enseñanza en el aula: un estudio experimental. Revista estadounidense de investigación educativa, 26(4), 499–531.

Carpenter, TP, Gómez, C., Rousseau, C., Steinthorsdottir, O., Valentine, C., Wagner, L. y Wiles, P. (abril de 1999). Un análisis de la construcción estudiantil de la comprensión de razones y proporciones. Trabajo presentado en la reunión anual de la Asociación Estadounidense de Investigación Educativa, Montreal.

Carraher, DW (1996). Aprender sobre fracciones. En LP Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin y B. Greer (Eds.), Teorías del aprendizaje matemático (págs. 241–266). Mah-wah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carroll, WM (1994). Utilizar ejemplos resueltos como apoyo a la instrucción en álgebra.

aLos estudios elegibles que cumplen con los estándares de evidencia del WWC o que cumplen con los estándares de evidencia con reservas se indican en negrita en las notas finales y en las páginas de referencias. Para obtener más información sobre estos estudios, consulte el Apéndice D.

aula. Revista de Psicología Educativa, 86, 360–367.

Chapin, SH y Anderson, Carolina del Norte (2003). Cruzando el puente hacia el razonamiento proporcional formal. Enseñanza de matemáticas en la escuela secundaria, 8(8), 420–425.

Chen, P. (1999). Comprensión temprana de los números racionales: compartir y razonamiento proporcional. Tesis doctoral, Universidad de California – Santa Bárbara.

Cole, DC (1992). Los efectos de un año Programa de desarrollo del personal sobre el logro de puntajes en las pruebas de los estudiantes de cuarto grado. Dissertation Abstracts International (UMI No. 9232258), 53(06), 1792A.

Cooper, G. y Sweller, J. (1987). Efectos de Adquisición de esquemas y automatización de reglas en la transferencia de resolución de problemas matemáticos. Revista de Psicología Educativa, 79, 347–362.

Cramer, K. y Henry, A. (2002). Usar modelos manipulativos para desarrollar el sentido numérico para la suma de fracciones. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), Dar sentido a fracciones, razones y proporciones: anuario de 2002 (págs. 41 a 48). Reston, VA: Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Cramer, K. y Post, T. (febrero de 1993). Establecer conexiones: un caso a favor de la proporcionalidad. Profesor de aritmética, 60 (6), 342–346.

Cramer, K., Post, T. y Currier, S. (1993). Relación y proporción de aprendizaje y enseñanza: implicaciones de la investigación. En D. Owens (Ed.), Ideas de investigación para el aula (págs. 159-178). Nueva York: Macmillan.

Cramer, K., Post, T. y delMas, RC (2002). Aprendizaje de fracciones iniciales por parte de estudiantes de cuarto y quinto grado: una comparación de los efectos del uso de planes de estudio comerciales con los efectos del uso del plan de estudios del Proyecto de Números Racionales. Revista de investigación en educación matemática, 33 (2), 111–144.

Cramer, K. y Wyberg, T. (2009). Eficacia de diferentes modelos concretos para la enseñanza del constructo parte-todo para fracciones. Pensamiento y aprendizaje matemático, 11 (4), 226–257.

Cramer, K., Wyberg, T. y Leavitt, S. (2008). El papel de las representaciones en la suma y resta de fracciones. Enseñanza de matemáticas en la escuela secundaria, 13(8), 490–496.

Davis, GE y Pepper, KL (1992). Resolución de problemas matemáticos por parte de niños en edad preescolar. Estudios educativos en matemáticas, 23, 397–415.

Davis, GE y Pitkethly, A. (1990). Aspectos cognitivos del compartir. Revista de investigación en educación matemática, 21, 145-153.

Empson, SB (1999). Compartir equitativamente y significado compartido: el desarrollo de conceptos de fracciones en un aula de primer grado. Cognición e instrucción, 17(3), 283.

Frydman, O. y Bryant, PE (1988). Compartir y comprender la equivalencia numérica por parte de niños pequeños. Desarrollo cognitivo, 3, 323–339.

Fujimura, N. (2001). Facilitar el razonamiento proporcional de los niños: un modelo de procesos de razonamiento y efectos de la intervención en el cambio de estrategia. Revista de Psicología Educativa, 93(3), 589–603.

Garet, M., Wayne, A., Stancavage, F., Taylor, J., Walters, K., Song, M., . . . Doolittle, F. (2010). Estudio de impacto en el desarrollo profesional de matemáticas en la escuela secundaria: Hallazgos después del primer año de implementación (NCEE 2010-4009). Washington, DC: Centro Nacional de Evaluación Educativa y Asistencia Regional, Instituto de Ciencias de la Educación, Departamento de Educación de EE. UU.

Gerver, R. y Sgroi, R. (1989). Centrarse en Errores putacionales para profesores de programas de matemáticas de habilidades básicas. Cincinnati, OH: División Escolar del Sudoeste.

Gonzales, P., Williams, T., Jocelyn, L., Roey, S., Kastberg, D. y Brenwald, S. (2009). Aspectos destacados de TIMSS 2007: Rendimiento en matemáticas y ciencias de estudiantes estadounidenses de cuarto y octavo grado en un contexto internacional (NCES 2009–001, revisado). Washington, DC: Centro Nacional de Estadísticas Educativas, Instituto de Ciencias de la Educación, Departamento de Educación de Estados Unidos.

Goswami, U. (1989). Complejidad relacional y desarrollo del razonamiento analógico. Desarrollo cognitivo, 4, 251–268.

Goswami, U. (1995). Relacional transitivo Mapeos en niños de tres y cuatro años: el analogía de Ricitos de Oro y los Tres Osos. Desarrollo infantil, 66(3), 877–892.

Hackenberg, AJ (2007). Coordinación de unidades y la construcción de fracciones impropias: una revisión de la hipótesis de división. Revista de comportamiento matemático, 26 (1), 27–47.

Hecht, SA (1998). Hacia una explicación del procesamiento de información de las diferencias individuales en las habilidades de fracciones. Revista de Psicología Educativa, 90(3), 545–559.

Hecht, SA, Close, L. y Santisi, M. (2003). Fuentes de diferencias individuales en las habilidades de fracciones. Revista de Psicología Infantil Experimental, 86(4), 277.

Hecht, SA y Vagi, K. (en prensa). Fuentes de diferencias grupales e individuales en las habilidades de fracciones emergentes. Revista de Psicología Educativa.

Heller, PM, Ahlgren, A., Post, T., Behr, M. y Lesh, R. (1989). Razonamiento proporcional: el efecto de dos variables de contexto, tipo de tasa y planteamiento del problema. Revista de investigación en enseñanza de ciencias, 26 (3), 205–220.

Hembree, R. (1992). Experimentos y estudios relacionales en la resolución de problemas: un metanálisis. Revista de investigación en educación matemática, 23, 242–273.

Hiebert, J., Wearne, D. y Taber, S. (1991). Construcción gradual de fracciones decimales por parte de estudiantes de cuarto grado durante la instrucción utilizando diferentes representaciones físicas. El diario de la escuela primaria, 91(4), 321–341.

Hill, HC, Rowan, B. y Ball, DL (2005). Efectos del conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza sobre el rendimiento de los estudiantes. Revista estadounidense de investigación educativa, 42(2), 371–406.

Hoffer, T., Venkataraman, L., Hedberg, EC y Shagle, S. (2007). Informe final de la encuesta nacional a profesores de álgebra para el Panel Nacional de Matemáticas. Chicago: Centro Nacional de Investigación de Opinión de la Universidad de Chicago.

Hudson Hawkins, V. (2008). Los efectos de los manipulativos matemáticos sobre el rendimiento de los estudiantes en matemáticas. Tesis doctoral no publicada, Cappella University, Minneapolis, MN.

Caza, RP y Sharpley, CF (1988). Cognición de unidades fraccionarias en niños en edad preescolar. Revista Británica de Psicología Educativa, 58, 172–183.

Irwin, KC (2001). Usar el conocimiento cotidiano de los decimales para mejorar la comprensión. Revista de investigación en educación matemática, 32(4), 399–420.

Izsak, A., Tillema, E. y Tunc-Pekkan, Z. (2008). Enseñar y aprender la suma de fracciones en rectas numéricas. Revista de investigación en educación matemática, 39 (1), 33–62.

Jacobs, VJ, Franke, ML, Carpenter, T. P., Levi, L. y Battey, D. (2007). Un estudio a gran escala sobre el desarrollo profesional se centró en el razonamiento algebraico de los niños en la escuela primaria. Revista de investigación en educación matemática, 38, 258–288.

Jitendra, AK, Star, JR, Starosta, K., Leh, JM, Sood, S., Caskie, G.,. . . Mack, TR (2009). Mejorar el aprendizaje de razones y proporciones de los estudiantes de séptimo grado: el papel de la instrucción basada en esquemas. Psicología educativa contemporánea, 34 (3), 250–264.

Johanning, DI (2006, abril). Puntos de referencia y estimación: un elemento crítico para apoyar a los estudiantes mientras desarrollan algoritmos de fracciones. Trabajo presentado en la reunión de Psicología de las Matemáticas y Educación de América del Norte, St. Louis, MO.

Kamii, C. y Warrington, MA (1995). División con fracciones: un enfoque constructivista piagetiano. Revista de Hiroshima de Educación Matemática, 3, 53–62.

Keijzer, R. y Terwel, J. (2003). Aprendizaje para la comprensión matemática: un estudio comparativo longitudinal sobre modelado. Aprendizaje e instrucción, 13 (3), 285–304.

Kent, LB, Arnosky, J. y McMonagle, J. (2002). Usar contextos representacionales para apoyar el razonamiento multiplicativo. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), Dar sentido a fracciones, razones y proporciones: anuario de 2002 (págs. 145-152). Reston, VA: Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Kerslake, D. (1986). Fracciones: Infantil Estrategias y errores: un informe del proyecto de estrategias y errores en matemáticas de secundaria. Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson.

Kloosterman, P. (2010). Habilidades matemáticas de jóvenes de 17 años en los Estados Unidos: 1978 a 2004. Revista de investigación en educación matemática, 41 (1), 20–51.

Lamon, SJ (1993). Razón y proporción: procesos cognitivos y metacognitivos infantiles. En TP Carpenter, E. Fennema y TA Romberg (Eds.), Números racionales: una integración de la investigación (págs. 131-156). Hillsdale, Nueva Jersey: Erlbaum.

Lamon, SJ (1994). Razón y proporción: fundamentos cognitivos en la unificación y la normalización. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), El desarrollo del razonamiento multiplicativo en el aprendizaje de las matemáticas (págs. 89-120). Albany: Prensa de la Universidad Estatal de Nueva York.

Lamon, SJ (2005). Enseñar fracciones y proporciones para la comprensión: conocimiento del contenido esencial y estrategias de instrucción para maestros (2ª ed.). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, SJ (2007). números racionales y razonamiento proporcional: hacia un marco teórico para la investigación. En F. Lester (Ed.), Segundo manual de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (págs. 629–668). Reston, VA: Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Razonamiento proporcional. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), Conceptos y operaciones numéricas en los grados intermedios (págs. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Lewis, AB (1989). Capacitar a los estudiantes para representar problemas verbales de aritmética. Revista de Psicología Educativa, 81(4), 521–531.

Lewis, AB y Mayer, RE (1987). Estudiantes' mala comprensión de enunciados relacionales en problemas verbales de aritmética. Revista de Psicología Educativa, 79, 363–371.

Li, Y. y Kulm, G. (2008). Conocimiento y confianza de los futuros profesores de matemáticas: el caso de la división de fracciones. ZDM, 40(5), 833–843.

Mamá, L. (1999). Conocer y enseñar elementos Matemáticas básicas: comprensión de los profesores de las matemáticas fundamentales en China y los Estados Unidos. Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, NK (1990). Aprender fracciones con Comprensión: Aprovechar el conocimiento informal. Revista de investigación en educación matemática, 21 (1), 16–32.

Mack, NK (1993). Aprender números racionales con comprensión: el caso del conocimiento informal. En TP Carpenter, E. Fennema y TA Romberg (Eds.), Números racionales: una integración de la investigación (págs. 85-105). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, NK (1995). Confundir números enteros conceptos de fibras y fracciones al desarrollar conocimientos informales. Revista de investigación en educación matemática, 26(5), 422–441.

Mack, NK (2000, abril). Efectos a largo plazo de aprovechar el conocimiento informal en un dominio de contenido complejo: el caso de la multiplicación de fracciones. Trabajo presentado en la reunión anual de la Asociación Estadounidense de Investigación Educativa, Nueva Orleans, LA.

Mack, NK (2001). Aprovechando la informalidad conocimiento a través de la instrucción en un dominio de contenido complejo: partición, unidades y comprensión de la multiplicación de fracciones. Revista de investigación en educación matemática, 32 (3), 267–295.

Marchionda, H. (2006). Profesores en formación Comprensión procesal y conceptual de fracciones y los efectos del aprendizaje basado en la investigación en esta comprensión. Tesis inédita, Clemson University, Clemson, SC.

McCloskey, M. (2007). Alfabetización cuantitativa y discalculias del desarrollo. en base de datos Berch & MMM Mazzocco (Eds.), ¿Por qué las matemáticas son tan difíciles para algunos niños? La naturaleza y los orígenes de las dificultades y discapacidades matemáticas (págs. 415–429). Baltimore, MD: Editorial Paul H. Brookes.

Meyer, SJ y Sutton, JT (octubre de 2006). Vincular las características de los maestros con los resultados de matemáticas de los estudiantes: evidencia preliminar del impacto en los maestros y estudiantes después de la participación en el primer año de la Asociación Math in the Middle Institute. Documento presentado en la II Cumbre de Evaluación de MSP, Minneapolis, MN.

Moore, LJ y Carnine, D. (1989). Evaluación del diseño curricular en el contenido de la educación activa.

enseñando. Educación especial y de recuperación, 10 (4), 28–37.

Moseley, BJ, Okamoto, Y. e Ishida, J. (2007). Comparación de la facilidad de los profesores de escuelas primarias estadounidenses y japonesas para vincular representaciones de números racionales. Revista Internacional de Educación en Ciencias y Matemáticas, 5(1), 165–185.

Mullis, I., Martin, M., Beaton, A., González, E., Kelly, D. y Smith, T. (1997). Rendimiento en matemáticas en los años de escuela primaria: tercer estudio de matemáticas y ciencias de la IEA. Boston: Centro para el estudio de pruebas, evaluaciones y políticas educativas, Boston College.

Academia Nacional de Ciencias. (2007). Superando la tormenta que se avecina: Energizar y emplear a Estados Unidos para un futuro económico más brillante. Washington, DC: La Academia Nacional Prensa de enemigos.

Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas. (2000). Principios y estandares para matematica escolar. Reston, VA: Autor.

Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas circuitos integrados. (2007). El aprendizaje de las matemáticas: 69º anuario del NCTM. Reston, VA: Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Panel Asesor Nacional de Matemáticas. (2008). Fundamentos del éxito: el informe final del Panel Asesor Nacional de Matemáticas. Washington, DC: Prensa de Academias Nacionales.

Consejo nacional de investigación. (2001). Sumando: Ayudar a los niños a aprender matemáticas. J. Kilpatrick, J. Swafford y B. Findell (Eds.). Comité de Estudio del Aprendizaje de Matemáticas, Centro de Educación, División de Ciencias Sociales y del Comportamiento y Educación. Washington, DC: Prensa de la Academia Nacional.

Newton, KJ (2008). Un análisis extenso del conocimiento de fracciones de los futuros maestros de primaria. Revista estadounidense de investigación educativa, 45(4), 1080–1110.

Ni, Y. y Zhou, Y. (2005). Enseñanza y aprendizaje de fracciones y números racionales: los orígenes y las implicaciones del sesgo de los números enteros. Psicólogo educativo, 40(1), 27–52.

Niemi, D. (1996). Una fracción no es pan comido: evaluación del desempeño excepcional y la comprensión profunda en la escuela primaria matemáticas escolares. Niño superdotado trimestralmente, 40(2), 70–80.

Niess, ML (2005). Oregon ESEA título IIB MSP: Consorcio de Oregon Central. Informe para el Departamento de Educación de EE. UU., Asociaciones de Matemáticas y Ciencias. Corvallis, OR: Departamento de Educación Científica y Matemática, Universidad Estatal de Oregon.

Nishida, conocimientos tradicionales (2008). El uso de manipulables para apoyar la adquisición de conceptos matemáticos abstractos por parte de los niños. Tesis inédita, Universidad de Virginia, Charlottesville, VA.

Opfer, J. y DeVries, J. (2008). Cambio representacional y estimación de magnitud: por qué los niños pequeños pueden hacer comparaciones salariales más precisas que los adultos. Cognición, 108, págs. 843–849.

Pintor, RR (1989). Una comparación de los patrones de error de procedimiento, puntuaciones y otras variables de grupos seleccionados de estudiantes universitarios y de octavo grado en Mississippi en una prueba que involucra operaciones aritméticas con fracciones. Tesis inédita, Universidad del Sur de Mississippi, Hattiesburg, MS.

Pimienta, KL (1991). Conocimiento de los niños en edad preescolar sobre contar y compartir en entornos de cantidades discretas. En RP Hunting y G. Davis (Eds.), Aprendizaje temprano de fracciones (págs. 103-127). Nueva York: Springer-Verlag.

Post, T., Harel, G., Behr, M. y Lesh, R. (1988). Conocimiento de los profesores de nivel intermedio sobre conceptos de números racionales. En E. Fennema, TP Carpenter y SJ Lamon (Eds.), Integración de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (págs. 177-198). Albany: Prensa de la Universidad Estatal de Nueva York.

Pothier, Y. y Sawada, D. (1990). Dividir- ing: Una aproximación a las fracciones. Profesor de aritmética, 38 (4), 12-17.

Ramani, GB y Siegler, RS (2008). Promover mejoras amplias y estables en el conocimiento numérico de los niños de bajos ingresos mediante juegos de mesa numéricos. Desarrollo infantil, 79(2), 375–394.

Reed, SK y Bolstad, CA (1991). Uso de ejemplos y procedimientos en la resolución de problemas. Revista de psicología experimental: aprendizaje, memoria y cognición, 17, 753–766.

Resnick, LB y Singer, JA (1993). Proto-
Orígenes cuantitativos del razonamiento ratio. En TP Carpenter, E. Fennema y TA Rom-berg (Eds.), Números racionales: una integración de la investigación (págs. 107-130). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Rittle-Johnson, B. y Koedinger, KR (2002, octubre). Comparar estrategias de instrucción para integrar conocimientos conceptuales y procedimentales. Trabajo presentado en la reunión anual del Capítulo Norteamericano del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática, Atenas, GA.

Rittle-Johnson, B. y Koedinger, KR (2005). Diseñar andamios de conocimiento para apoyar la resolución de problemas matemáticos. Cognición e instrucción, 23(3), 313–349.

Rittle-Johnson, B. y Koedinger, K. (2009). La iteración entre lecciones sobre conceptos y procedimientos puede mejorar el conocimiento matemático. Revista Británica de Psicología Educativa, 79, 483–500.

Rittle-Johnson, B., Siegler, RS y Alibali, MW (2001). Desarrollar la comprensión conceptual y la habilidad procedimental en matemáticas: un proceso iterativo.

Revista de Psicología Educativa, 93(2), 346–362.

Rivera-Batiz, FL (1992). Alfabetización cuantitativa y probabilidad de empleo entre adultos jóvenes en los Estados Unidos. Revista de Recursos Humanos, 27(2), 313–328.

Ross, JA, Hogaboam-Gray, A. y Bruce, C. (2006). El impacto de un programa de desarrollo profesional en el rendimiento de los estudiantes de sexto grado. Journal of Mathematics Teacher Education, 9(6), 1–27.

Saxe, GB, Gearhart, M. y Nasir, NS (2001). Mejorar la comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes: un estudio de tres enfoques contrastantes para el apoyo profesional. Revista de formación de profesores de matemáticas, 4(1), 55–79.

Schneider, M., Grabner, RH y Paetsch, J. (2009). Recta numérica mental, estimación con recta numérica y rendimiento matemático: sus interrelaciones en los grados 5 y 6.

Revista de Psicología Educativa, 101(2), 359–372.

Schneider, W. y Pressley, M. (1997). Desarrollo de la memoria entre los dos y los veinte (2ª ed.). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Sellke, D., Behr, M. y Voelker, A. (1991). Usar tablas de datos para representar y resolver problemas narrativos multiplicativos. Revista de investigación en educación matemática, 22 (1), 30–38.

Afilado, BD (2004). El conocimiento de los niños sobre fracciones. Tesis inédita, Universidad de Virginia, Charlottesville, VA.

Shoseki, T. (2010). Matemáticas para la escuela primaria (grados 1 a 6). Madison, Nueva Jersey: Recursos educativos globales.

Siegler, RS y Booth, JL (2004). Desarrollo de la estimación numérica en niños pequeños. Desarrollo infantil, 75(2), 428–444.

Siegler, RS y Ramani, GB (2008). Jugar juegos de mesa numéricos lineales promueve el desarrollo numérico de los niños de bajos ingresos. Ciencia del desarrollo, 11 (5), 655–661.

Siegler, RS y Ramani, GB (2009). Jugar juegos de mesa con números lineales, pero no circulares, mejora la comprensión numérica de los niños en edad preescolar de bajos ingresos. Revista de Psicología Educativa, 101(3), 545–560.

Singer-Freeman, K. y Goswami, U. (2001). ¿Media pizza equivale a media caja de chocolates? Emparejamiento proporcional en una tarea de analogía. Desarrollo cognitivo, 16(3), 811–829.

Sloan, HA (1993). Instrucción directa en aulas de cuarto y quinto grado. Tesis inédita, Universidad Purdue, West Lafayette, IN.

Smith, JP (2002). El desarrollo de estu-
Conocimiento de los estudiantes sobre fracciones y proporciones. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), Dar sentido a fracciones, razones y proporciones: anuario de 2002 (págs. 3 a 17). Reston, VA: Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Sofía, C. (2007). Los orígenes de las matemáticas. Conocimientos matemáticos en la infancia. Estudios en pensamiento y aprendizaje matemático. Hills-dale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Sophian, C., Garyantes, D. y Chang, C. (1997). Cuando tres es menor que dos: desarrollos tempranos en la comprensión de los niños sobre cantidades fraccionarias. Psicología del desarrollo, 33, 731–744.

Sophian, C. y Wood, A. (1997). Razonamiento proporcional en niños pequeños: Las partes y el todo. Revista de Psicología Educativa, 89(2), 309–317.

Sowder, JT, Philipp, RA, Armstrong, BE y Schappelle, BP (1998). El conocimiento matemático de los profesores de grado medio y su relación con la instrucción. Ithaca, Nueva York: Prensa de la Universidad Estatal de Nueva York.

Spinillo, AG (1995, julio). ¿Pueden los niños pequeños aprender a razonar proporcionalmente? Un estudio de intervención. Trabajo presentado en la conferencia anual del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática, Recife, Brasil.

Spinillo, AG y Bryant, P. (1991). Juicios proporcionales de los niños: la importancia de la “mitad”. Desarrollo infantil, 62, 427–440.

Spinillo, AG y Bryant, P. (1999). Proporcional Razonamiento funcional en niños pequeños: comparaciones parte-parte sobre cantidades continuas y discontinuas. Cognición matemática, 5(2), 181–197.

Starkey, P., Klein, A. y Wakeley, A. (2004). Mejorar el conocimiento matemático de los niños pequeños a través de una intervención matemática de preescolar. Investigación trimestral sobre la primera infancia, 19, 99–120.

Tallo, BS (2008). Desarrollar la comprensión del razonamiento proporcional en los estudiantes de secundaria a través de la investigación matemática. Educación 3–13, 36(4), 383–392.

Streefland, L. (1991). Fracciones en la educación matemática realista: un paradigma de investigación del desarrollo. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Sweller, J. y Cooper, GA (1985). El uso de ejemplos resueltos como sustituto de la resolución de problemas en el aprendizaje de álgebra. Cognición e instrucción, 2, 59–89.

Tatsuoka, KK y Tatsuoka, MM (1983). Detectar reglas de funcionamiento erróneas mediante el índice de consistencia individual. Revista de medición educativa, 20, 221–230.

Terwel, J., van Oers, B., van Dijk, I. y Van den Eeden, P. (2009). ¿Se deben proporcionar o generar representaciones en la educación matemática primaria? Efectos sobre la transferencia. Investigación y evaluación educativa, 15 (1), 25–44.

Thompson, PW y Saldanha, LA (2003). Fracciones y razonamiento multiplicativo. En P. Kilpatrick (Ed.), Un complemento de investigación de principios y estándares para las matemáticas escolares (págs. 95-113). Reston, VA: Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Tirosh, D. (2000). Mejorando la prospectiva Conocimiento de los profesores sobre las concepciones de los niños: el caso de la división de fracciones. Revista de investigación en educación matemática, 31 (1), 5–25.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Comprensión de la estructura del conjunto de números racionales: un enfoque de cambio conceptual. Aprendizaje e instrucción, 14 (1), 453–467.

Van de Walle, J., Karp, K. y Bay-Williams, J. (2010). Matemáticas en la escuela primaria y secundaria: enseñanza del desarrollo (7ª ed.). Boston, MA: Allyn y Bacon.

Warren, E. y Cooper, T. (2007). Patrones repetitivos y pensamiento multiplicativo: Análisis de interacciones en el aula con estudiantes de 9 años que apoyan la transición de lo conocido a lo novedoso. Diario de interacción en el aula, 41/42(2), 7–17.

Warrington, M. y Kamii, C. (1998). Multiplicación con fracciones: un enfoque constructivista piagetiano. Enseñanza de matemáticas en la escuela secundaria, 3(5), 339–343.

Wearne, D. y Hiebert, J. (1989). Cognitivo cambios durante la instrucción basada conceptualmente en fracciones decimales. Revista de Psicología Educativa, 81(4), 507–513.

Wu, H. (2002). Capítulo 2: Fracciones (Borrador). Obtenido el 3 de octubre de 2009 de http://www.math.berkeley.edu/~wu/ .

Wu, Z. (2004). El estudio de la escuela media. Comprensión y uso de la representación matemática por parte de los docentes en relación con la zona de desarrollo próximo de los docentes en la enseñanza de fracciones y funciones algebraicas.

Tesis inédita, Universidad Texas A&M, College Station, TX.

Xin, YP, Jitendra, AK y Deatline-Buch-man, A. (2005). Efectos de la instrucción de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de secundaria con dificultades de aprendizaje. problemas. La Revista de Educación Especial, 39(3), 181–192.

Yanik, HB, Helding, B. y Flores, A. (2008). Enseñar el concepto de unidad en la interpretación de medidas de números racionales. Ilkogretim en línea, 7(3), 693–705.

Índice de conceptos matemáticos clave